Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

73. BAND, 5. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 21. JUNI 1960)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1960

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

---

73. Band **Inhalt** 5. Heft

Seite

Tamaschke, O., Ringtheoretische Behandlung einfach transitiver Permutationsgruppen 393

Behrens, E.-A., Distributiv darstellbare Ringe 409

Cohn, P. M., On the Free Product of Associative Rings. II. The Case of (Skew) Fields 433

Tschauner, J., Über einen Zusammenhang zwischen den Kugelfunktionen und Zylinderfunktionen 457

Srivastava, P., Tauberian theorems for absolute summability of series and integrals 460

Unveränderter Nachdruck 1974
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

TAMASCHKE, O.
Math. Zeitschr. 73, 393–408 (1960)

Ringtheoretische Behandlung einfach transitiver Permutationsgruppen

Von

OLAF TAMASCHKE

Im Jahre 1933 entwickelte ISSAI SCHUR eine Methode, die der Untersuchung von Permutationsgruppen ähnlich große Möglichkeiten eröffnet, wie die Methode der Gruppencharaktere [*20*]. SCHUR hatte die Behandlung von Permutationsgruppen im Sinn, welche eine reguläre Untergruppe gleichen Grades besitzen. Er ersetzte die zu permutierenden Objekte durch Gruppenelemente. WIELANDT hat diese Methode verfeinert und neue Anwendungsmöglichkeiten erschlossen ([*22*], [*23*] und [*24*]).

Wir geben hier eine ringtheoretische Begründung der Methode von SCHUR und WIELANDT, die durch die Bildung bestimmter idempotenter Elemente im Gruppenring vorgezeichnet wird und im Ansatz schon in den Arbeiten von FRAME ([*13*] bis [*16*]) zu finden ist. Zweierlei wird dadurch erreicht:

1. Einer Untergruppe $\mathfrak{G}_0$ der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ wird ein idempotentes Element ε des Gruppenrings $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ zugeordnet. Das Rechtsideal $\varepsilon\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$ bildet einen Darstellungsmodul für die von $\mathfrak{G}_0$ erzeugte Permutationsdarstellung von $\mathfrak{G}$. Eine Basis des Ringes $\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$ ist umkehrbar eindeutig den Transitivitätsgebieten von $\mathfrak{G}_0$ zugeordnet. Als Linksmultiplikatorenbereich von $\varepsilon\mathfrak{A}$ ist $\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$ isomorph zum $\mathfrak{A}$-Endomorphismenring von $\varepsilon\mathfrak{A}$. Das Zusammenwirken der Linksoperatoren aus $\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$ mit den Gruppenelementen als Rechtsoperatoren auf dem Darstellungsmodul $\varepsilon\mathfrak{A}$ wird für die Untersuchung transitiver Permutationsgruppen nutzbar gemacht (Abschnitt 1).

2. Der Grundkörper K des Gruppenringes $\mathfrak{A}$ kann dabei ein beliebiger Körper sein mit der einen Einschränkung, daß die Charakteristik von K nicht in der Ordnung von $\mathfrak{G}_0$ aufgeht; in der Ordnung von $\mathfrak{G}$ darf sie aufgehen. Dadurch können die Methoden und Ergebnisse der Theorie der Algebren mit Radikal und der modularen Darstellungstheorie angewandt werden, die von RICHARD BRAUER und seinen Schülern entwickelt worden ist.

Im 2. Abschnitt verallgemeinern wir mit Hilfe der Cartan-Invarianten den bekannten Ausdruck $t=\sum_{\varkappa} v_\varkappa^2$, der die Anzahl t der Transitivitätsgebiete von $\mathfrak{G}_0$ mit den Vielfachheiten $v_\varkappa$ der irreduziblen Bestandteile der Permutationsdarstellung von $\mathfrak{G}$ verknüpft. Nach Bemerkungen über die Struktur des Rechtsideals $\varepsilon\mathfrak{A}$ im Abschnitt 3 weisen wir im 4. Abschnitt auf die Beziehungen zwischen dem Charakter der Permutationsdarstellung und den modularen Charakteren hin. Es folgen in den beiden nächsten Abschnitten Hinweise auf eine Theorie ohne die Einschränkung Char $\mathsf{K}\nmid|\mathfrak{G}_0|$ und auf die Untersuchungen von FRAME über "double coset matrices"

Einleitung

Sei $\mathfrak{G}$ eine transitive Permutationsgruppe des Grades n, die die Elemente („Ziffern") der Menge $A=\{0, 1, \ldots, n-1\}$ vertauscht. $\mathfrak{G}_0$ bezeichne die Untergruppe der Elemente von $\mathfrak{G}$, die die Ziffer 0 fest lassen; g sei die Ordnung von $\mathfrak{G}$, g_0 die Ordnung von $\mathfrak{G}_0$. Wir wählen ein Vertretersystem für die Nebenklassen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{G}_0$ und bezeichnen seine Elemente R_i so, daß $0^{R_i}=i$ gilt:

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_0 R_0 \cup \ldots \cup \mathfrak{G}_0 R_{n-1}, \qquad n=|\mathfrak{G}:\mathfrak{G}_0|.$$

Wir betrachten die Darstellung $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ durch Permutationsmatrizen. $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ wird von der identischen Darstellung von $\mathfrak{G}_0$ induziert. Diese Auffassung rücken wir in den Vordergrund. Wir suchen einen Darstellungsmodul für $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$. Weil die Koeffizienten der Permutationsmatrizen gleich 0 oder 1 sind, kann der Grundkörper dieses Darstellungsmoduls ein beliebiger Körper K sein.

Sei $\mathfrak{A}=\mathsf{K}[\mathfrak{G}]$ der Gruppenring von $\mathfrak{G}$ über dem Körper K. $\mathfrak{A}$ ist die Menge der Linearverbindungen $\alpha=\sum_{G\in\mathfrak{G}} a_G G$ der Gruppenelemente $G\in\mathfrak{G}$ mit Koeffizienten $a_G\in\mathsf{K}$, mit denen in natürlicher Weise additiv und multiplikativ gerechnet wird [*25*, S. 55]. $\mathfrak{A}_0=\mathsf{K}[\mathfrak{G}_0]$ sei der Gruppenring von $\mathfrak{G}_0$ über K. Mit $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_0$ bezeichnen wir die Radikale von $\mathfrak{A}$ bzw. von $\mathfrak{A}_0$, die vom Nullideal verschieden sein können, wenn die Charakteristik von K die Gruppenordnung g teilt.

$\mathfrak{A}$ zerfällt in eine direkte Summe von direkt unzerlegbaren nicht nilpotenten Rechtsidealen $e_\varkappa\mathfrak{A}$, die von primitiven idempotenten Elementen $e_\varkappa$ erzeugt werden [*1*, S. 100, Theorem 9.3 C und S. 33]. $e_\varkappa\mathfrak{R}$ ist das eindeutig bestimmte maximale Rechtsideal in $e_\varkappa\mathfrak{A}$ [*1*, S. 98, Coroll. 9.2 F]. Jeder irreduzible $\mathfrak{A}$-Rechtsmodul (der nicht von $\mathfrak{A}$ annulliert wird) ist isomorph zu einem der Faktormoduln $e_\varkappa\mathfrak{A}/e_\varkappa\mathfrak{R}$ [*1*, S. 102, Theorem 9.3 D]. Es gilt $e_\varkappa\mathfrak{A}\cong e_\lambda\mathfrak{A}$ genau dann, wenn $e_\varkappa\mathfrak{A}/e_\varkappa\mathfrak{R}\cong e_\lambda\mathfrak{A}/e_\lambda\mathfrak{R}$ [*1*, S. 99, Theorem 9.2 G]. Auf diese Weise sind den direkt unzerlegbaren nicht nilpotenten Rechtsidealen $e_\varkappa\mathfrak{A}$ die irreduziblen $\mathfrak{A}$-Rechtsmoduln eindeutig zugeordnet, wenn wir isomorphe $\mathfrak{A}$-Rechtsmoduln nicht unterscheiden. Wir meinen diese Zuordnung, wenn wir sagen: $e_\varkappa\mathfrak{A}$ „gehört" zu einer irreduziblen Darstellung $\mathfrak{d}$ oder zu einem irreduziblen Darstellungsmodul $\mathfrak{M}$. In einer Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in eine direkte Summe von direkt unzerlegbaren nicht nilpotenten Rechtsidealen $e_\varkappa\mathfrak{A}$ gibt es genau so viele direkte Summanden $e_\varkappa\mathfrak{A}\cong e_\lambda\mathfrak{A}$, wie der Rang $(e_\lambda\mathfrak{A}/e_\lambda\mathfrak{R}:\mathsf{K})$ beträgt ([*1*, S. 100, Theorem 9.3 C] und die Strukturätze über halbeinfache Algebren). Entsprechendes gilt für $\mathfrak{A}_0$.

Es sei $\varepsilon\mathfrak{A}_0$ das eindeutig bestimmte direkt unzerlegbare nicht nilpotente Rechtsideal von $\mathfrak{A}_0$, auf dessen Faktormodul $\varepsilon\mathfrak{A}_0/\varepsilon\mathfrak{R}_0$ die Gruppe $\mathfrak{G}_0$ die identische Darstellung erleidet. ε sei dabei ein erzeugendes primitives Idempotent. $\mathfrak{A}_0$ ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{A}$.

$\varepsilon\mathfrak{A}$ ist ein Rechtsideal von $\mathfrak{A}$. Der Ring $\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$ ist, als Menge von Linksmultiplikatoren aufgefaßt, invers isomorph zum $\mathfrak{A}$-Endomorphismenring $\mathfrak{E}$ von $\varepsilon\mathfrak{A}$.

Wir führen den Beweis aus, um für das Folgende mit dieser bekannten Tatsache vertraut zu sein. Zunächst: Eine Abbildung σ von $\varepsilon\mathfrak{A}$ in sich heißt $\mathfrak{A}$-Endomorphismus, wenn sie die Eigenschaften besitzt:

$$(a\,\alpha)^\sigma = a\,\alpha^\sigma \qquad \text{für alle } a\in\mathsf{K},\quad \alpha\in\varepsilon\mathfrak{A},$$
$$(\alpha+\beta)^\sigma = \alpha^\sigma+\beta^\sigma \qquad \text{für alle } \alpha,\beta\in\varepsilon\mathfrak{A},$$
$$(\alpha\,\gamma)^\sigma = \alpha^\sigma\gamma \qquad \text{für alle } \alpha\in\varepsilon\mathfrak{A} \text{ und alle } \gamma\in\mathfrak{A}.$$

Sodann: Sei $\sigma\in\mathfrak{E}$. Wegen $\varepsilon^2=\varepsilon$ ist $\varepsilon\alpha=\alpha$ für alle $\alpha\in\varepsilon\mathfrak{A}$. Aus $\varepsilon^\sigma=\xi\in\varepsilon\mathfrak{A}$ folgt $\alpha^\sigma=(\varepsilon\alpha)^\sigma=\varepsilon^\sigma\alpha=\xi\alpha$ für alle $\alpha\in\varepsilon\mathfrak{A}$. Das Element ξ ist aus $\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$, weil $\xi\varepsilon=\varepsilon^\sigma\varepsilon=(\varepsilon\varepsilon)^\sigma=\varepsilon^\sigma=\xi$ gilt. Also kann $\sigma\in\mathfrak{E}$ durch die Linksmultiplikation mit dem Element $\xi\in\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$ dargestellt werden. Ist umgekehrt $\xi\in\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$, so liefert die Linksmultiplikation mit ξ einen $\mathfrak{A}$-Endomorphismus von $\varepsilon\mathfrak{A}$. Die Ringe $\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$ und $\mathfrak{E}$ sind invers isomorph; denn werden die $\mathfrak{A}$-Endomorphismen $\sigma_1,\sigma_2\in\mathfrak{E}$ durch die Linksmultiplikationen mit $\xi_1,\xi_2\in\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$ bewirkt, so ist

$$\varepsilon^{(\sigma_1\sigma_2)}=(\varepsilon^{\sigma_1})^{\sigma_2}=\xi_1^{\sigma_2}=\xi_2\xi_1.$$

Wir wählen den Grundkörper K so, daß jede über K irreduzible Darstellung von $\mathfrak{G}$ sogar absolut irreduzibel ist. Durch die Rechtsmultiplikationen von $\varepsilon\mathfrak{A}$ mit den Elementen $G\in\mathfrak{G}$ wird die Gruppe $\mathfrak{G}$ Rechtsoperatorenbereich von $\varepsilon\mathfrak{A}$. Wir erhalten so eine Darstellung $\mathfrak{D}_1(\mathfrak{G})$. Sie wird von einer Darstellung $\mathfrak{D}_0(\mathfrak{G}_0)$ induziert, die $\mathfrak{G}_0$ als Rechtsoperatorenbereich auf $\varepsilon\mathfrak{A}_0$ erfährt. Es gelten bemerkenswerte Beziehungen zwischen beiden Darstellungen ([*17*, S. 366, Theorem 9] und [*3*, § 26, S. 582ff.]).

$\varepsilon\mathfrak{A}$ enthält ein Rechtsideal $\mathfrak{r}$ als Darstellungsmodul zur Darstellung $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ durch Permutationsmatrizen mit Koeffizienten aus dem Körper K. $\mathfrak{r}$ kann von $\varepsilon\mathfrak{A}$ verschieden sein. Wir halten es aber für zweckmäßig, die Betrachtungen nicht auf $\mathfrak{r}$ zu beschränken, sondern die Einbettung von $\mathfrak{r}$ in $\varepsilon\mathfrak{A}$ mit zu untersuchen. Die Gründe hierfür können erst im 5. Abschnitt aufgezeigt werden.

Man untersuche die Struktur des K*-Links-*$\mathfrak{A}$*-Rechtsmoduls* $\varepsilon\mathfrak{A}$ *und des Ringes* $\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$*, der zum Ring* $\mathfrak{E}$ *der* $\mathfrak{A}$*-Endomorphismen von* $\varepsilon\mathfrak{A}$ *invers isomorph ist.*

Die Grundzüge dieses Programms führen wir — unter einer zusätzlichen Voraussetzung, die $\mathfrak{r}=\varepsilon\mathfrak{A}$ nach sich zieht — hier aus, mit der Absicht, vorhandene Methoden zur Untersuchung transitiver Permutationsgruppen den erwähnten ringtheoretischen Aspekten unterzuordnen und methodisch neue Ansätze zu ermöglichen.

1.

Wir setzen von nun an stets voraus, daß die Charakteristik des Grundkörpers K die Ordnung g_0 von $\mathfrak{G}_0$ nicht teilt:

$$\mathrm{Char}\,\mathsf{K}\nmid g_0.$$

Dann ist der Gruppenring $\mathfrak{A}_0$ von $\mathfrak{G}_0$ über K halbeinfach und

$$\varepsilon=\frac{1}{g_0}\sum_{G_0\in\mathfrak{G}_0}G_0$$

ist ein idempotentes Element von $\mathfrak{A}$. (Falls Char $\mathsf{K}=p\neq 0$, so ist hier und im folgenden immer zu beachten, daß die für p ganzen Zahlen, z. B. $1/g_0$, als Elemente des Primkörpers von K, also modulo p zu rechnen sind.) Es ist $\varepsilon\mathfrak{A}_0=\mathsf{K}\varepsilon$ das zweiseitige Ideal der halbeinfachen Algebra $\mathfrak{A}_0$, auf dem $\mathfrak{G}_0$ die identische Darstellung erfährt. $\varepsilon\mathfrak{A}$ ist der in der Einleitung beschriebene Darstellungsmodul von $\mathfrak{G}$.

Die Elemente εR_i $(i=0,\ldots,n-1)$ bilden eine K-Basis von $\varepsilon\mathfrak{A}$. Diese speziellen Basiselemente werden von den Gruppenelementen $G\in\mathfrak{G}$, wenn wir sie als Rechtsoperatoren auf $\varepsilon\mathfrak{A}$ wirken lassen, genau wie die Nebenklassen $\mathfrak{G}_0R_i$, also wie die Ziffern $0^{R_i}=i$ permutiert:

$$(\varepsilon R_i)\,G=\varepsilon R_{(i^G)}.$$

Wir können also, wo immer es bequem sein sollte, die Ziffern $i\in\Delta$ durch die Elemente εR_i ersetzen und $\mathfrak{G}$ als Permutationsgruppe auf der Menge $\{\varepsilon R_i\mid i=0,\ldots,n-1\}$ betrachten.

Wir stellen die Rechtsoperatoren $G\in\mathfrak{G}$ bezüglich der Basis εR_i $(i=0,\ldots,n-1)$ durch Matrizen dar:

$$\varepsilon R_i\,G=\sum_{j=0}^{n-1}a_{ij}^{(G)}\,\varepsilon R_j,$$

$$D(G)=(a_{ij}^{(G)})_{i,j=0,\ldots,n-1},\qquad a_{ij}^{(G)}=\begin{cases}1, & \text{wenn } j=i^G,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Dann gilt die Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix}\varepsilon R_0\\ \vdots\\ \varepsilon R_{n-1}\end{pmatrix}G=D(G)\begin{pmatrix}\varepsilon R_0\\ \vdots\\ \varepsilon R_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon R_{0^G}\\ \vdots\\ \varepsilon R_{(n-1)^G}\end{pmatrix}\tag{1.1}$$

und die Zuordnung $G\to D(G)$ ist eine Darstellung, die „Permutationsdarstellung" $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ über K.

(1.2) *$\varepsilon\mathfrak{A}$ ist ein Darstellungsmodul für die von $\mathfrak{G}_0$ erzeugte Darstellung $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ durch Permutationsmatrizen mit Koeffizienten aus dem Körper K.*

Der K-Modul $\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$ wird von den Elementen $\varepsilon G\varepsilon$, $G\in\mathfrak{G}$ erzeugt. Jedes Element $\varepsilon G\varepsilon$ entspricht einem Komplex in der Doppelmodulzerlegung von $\mathfrak{G}$ nach dem Doppelmodul $(\mathfrak{G}_0,\mathfrak{G}_0)$ [*21*, S. 63]. Die Ziffer 0^G liege im Transitivitätsgebiet Δ_k von $\mathfrak{G}_0$ der Länge $|\Delta_k|=n_k$. Aus $\Delta_k=\{0\}$ folgt $G\in\mathfrak{G}_0$ und $\varepsilon G\varepsilon=\varepsilon$. Ist hingegen $\Delta_k\neq\{0\}$ und $\mathfrak{G}_{0i}$ die Untergruppe derjenigen Elemente aus $\mathfrak{G}$, die außer 0 auch noch die Ziffer $i\in\Delta_k$ fest lassen, so erhalten wir aus

$$\frac{1}{n_k}=\frac{|\mathfrak{G}_{0i}|}{g_0},\qquad \frac{1}{n_0}=1$$

die Beziehung

$$\varepsilon G\varepsilon=\sum_{i=0}^{n-1}b_i\,\varepsilon R_i,\qquad b_i=\begin{cases}\dfrac{1}{n_k}, & \text{wenn } i\in\Delta_k,\ 0^G\in\Delta_k,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}\tag{1.3}$$

Den t Transitivitätsgebieten Δ_k $(k=0,\ldots,t-1)$ von $\mathfrak{G}_0$ entsprechen umkehrbar eindeutig die Elemente

$$\delta_k = n_k\,\varepsilon R_j\,\varepsilon = \sum_{i\in\Delta_k} \varepsilon R_i, \qquad j\in\Delta_k \qquad (k=0,\ldots,t-1). \tag{1.4}$$

(1.5) *Die δ_k bilden eine* K*-Basis von $\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$. Es ist $(\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon:\mathsf{K})=t=$ Anzahl der Transitivitätsgebiete von $\mathfrak{G}_0$.*

Jeder Gruppenring $\mathfrak{A}$ besitzt bekanntlich einen Antiautomorphismus:

$$\alpha=\sum_{G\in\mathfrak{G}} a_G G \to \alpha^* = \sum_{G\in\mathfrak{G}} a_G G^{-1},$$
$$(\alpha+\beta)^* = \alpha^*+\beta^*,$$
$$(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^* \quad \text{für alle } \alpha,\beta\in\mathfrak{A},$$
$$(\alpha^*)^* = \alpha.$$

Aus (1.4) folgt wegen $\varepsilon^*=\varepsilon$

(1.6) *Zu jedem k gibt es ein k' so, daß $\delta_k^*=\delta_{k'}$.*

Das Transitivitätsgebiet $\Delta_{k'}$ geht aus Δ_k durch „Spiegelung an 0" hervor [*24*, S. 38]. $\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$ verfügt somit über einen Antiautomorphismus, der sogar die Basis der δ_k in sich überführt. Ordnen wir jedem $\mathfrak{A}$-Endomorphismus von $\varepsilon\mathfrak{A}$ nicht seinen Linksmultiplikator $\xi=\sum_k x_k\delta_k$, sondern die Linksmultiplikation mit $\xi^*=\sum_k x_k\delta_k^*$ zu, so folgt

(1.7) *$\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$ ist, als Ring von Linksmultiplikatoren von $\varepsilon\mathfrak{A}$ aufgefaßt, isomorph zum $\mathfrak{A}$-Endomorphismenring $\mathfrak{E}$ von $\varepsilon\mathfrak{A}$.*

Wir gewinnen aus

$$\delta_k(\varepsilon R_i) = \delta_k R_i = \sum_{a\in\Delta_k} \varepsilon R_a R_i = \sum_{j=0}^{n-1} v_{ji}^{(k)}\,\varepsilon R_j$$

die Matrizen $V_k=(v_{ji}^{(k)})_{j,i=0,\ldots,n-1}$,

$$v_{ji}^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{wenn es zu } i\in\Lambda \text{ ein } a\in\Delta_k \text{ gibt mit } a^{R_i}=0^{R_a R_i}=0^{R_j}=j,\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

die schon Burnside [*10*, S. 174] und Schur [*20*, S. 599] den Transitivitätsgebieten von $\mathfrak{G}_0$ zugeordnet haben. Aus den Gleichungen

$$\delta_k(\varepsilon R_0,\ldots,\varepsilon R_{n-1}) = (\varepsilon R_0,\ldots,\varepsilon R_{n-1})V_k \tag{1.8}$$

folgt, daß die Abbildung $\delta_k\to V_k$ $(k=0,\ldots,t-1)$ eine Darstellung von $\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$ über K liefert.

$\delta_k^*=\delta_{k'}$ ist die transponierte Matrix $V_{k'}=V_k^T$ zugeordnet. Denn es ist $v_{ij}^{(k)}$ genau dann gleich 1, wenn $R_jR_i^{-1}$ in δ_k und damit auch $R_iR_j^{-1}$ in δ_k^* einen Koeffizienten $\neq 0$ hat, woraus $v_{ij}^{(k')}=1$ folgt. Schreiben wir (1.8) für δ_k^* an und gehen wir sodann zu den transponierten Matrizen über, so erhalten wir

$$\delta_k^*\begin{pmatrix}\varepsilon R_0\\ \vdots\\ \varepsilon R_{n-1}\end{pmatrix} = V_k\begin{pmatrix}\varepsilon R_0\\ \vdots\\ \varepsilon R_{n-1}\end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Daraus folgt mit (1.1), (1.6) und (1.7)

(1.10) *Die V_k bilden eine Basis für den Vertauschungsring der Permutationsdarstellung $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ über dem Körper* K.

Besitzt $\mathfrak{G}$ eine reguläre Untergruppe $\mathfrak{H}$, so nehmen wir die Elemente H_i von $\mathfrak{H}$ als Vertreter R_i für die Nebenklassen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{G}_0$. Der Ring $\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$ unterscheidet sich dann vom *Transitivitätsmodul* $\mathfrak{r}(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}_0)$ [*24*, S. 47], der von den „einfachen Basisgrößen" $\tau_k = \sum_{i \in \Delta_k} H_i$ aufgespannt wird und ein *S-Ring* ist ([*22*, S. 583 f.], [*23*, S. 385 f.] und [*24*, § 23]), lediglich durch das Mitführen des Faktors ε. Denn die Abbildung

$$\tau_k \to \varepsilon\,\tau_k = \sum_{i \in \Delta_k} \varepsilon\, H_i = \delta_k$$

liefert wegen

$$\varepsilon(\tau_k + \tau_k) = \varepsilon\,\tau_k + \varepsilon\,\tau_k = \delta_k + \delta_k,$$

$$\varepsilon(\tau_k\,\tau_k) = (\varepsilon\,\tau_k)\,\tau_k = \delta_k\,\tau_k = (\delta_k\,\varepsilon)\,\tau_k = \delta_k(\varepsilon\,\tau_k) = \delta_k\,\delta_k$$

einen Isomorphismus von $\mathfrak{r}(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}_0)$ auf $\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$, bei dem $E \in \mathfrak{H}$ in ε und τ_k^* in δ_k^* übergeht. Zugleich ist (1.10) wegen (1.7) eine Verallgemeinerung von [*24*, (28.8)].

Diejenigen Eigenschaften von $\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$, die sich aus der speziellen Basis der δ_k, den „einfachen Basisgrößen" der Theorie von SCHUR und WIELANDT, ergeben, lassen sich leicht in enger Anlehnung an [*23*] und [*24*, Kapitel IV] herleiten. Wir verzichten hier auf die Übertragung der Ergebnisse, deren Bedeutung in den Arbeiten [*22*] und [*23*] von WIELANDT zu Tage tritt. Wir wenden uns weiterhin der algebrentheoretischen Seite der Theorie zu.

2.

Für die Untersuchung einfach transitiver Permutationsgruppen ist die Anzahl t der Transitivitätsgebiete von $\mathfrak{G}_0$ wichtig, Stets ist $t \geqq 2$. Genau dann ist $t = 2$, wenn $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv ist. Die Zahl t betrachten wir als Maß dafür, wie weit eine einfach transitive Gruppe von der zweifachen Transitivität abweicht.

Die Tatsache, daß der Rang $(\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon : \mathsf{K})$ mit dieser Zahl übereinstimmt (1.5), spielt in der Theorie von SCHUR und WIELANDT eine hervorragende Rolle. Die Darstellungstheorie — und mit ihr die Theorie der Gruppencharaktere — findet bei der Untersuchung transitiver Permutationsgruppen einen Ansatzpunkt in der Beziehung

$$t = \sum_{\varkappa} v_\varkappa^2 \tag{2.1}$$

zwischen t und den Vielfachheiten $v_\varkappa$, mit denen die irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{D}_\varkappa(\mathfrak{G})$ in der Permutationsdarstellung über dem Körper der komplexen Zahlen auftreten. Bindeglied zwischen beiden Ausdrucksmöglichkeiten sind die Sätze (1.7) und (1.10).

(2.1) weist darauf hin, daß t über die Rangbeziehung (1.5) hinaus eng mit der Struktur des Rechtsideals $\varepsilon\mathfrak{A}$ und des Ringes $\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$ verknüpft ist. Diesen Zusammenhängen wollen wir in den folgenden Abschnitten nachgehen. Wir verallgemeinern zunächst (2.1), indem wir die Permutationsdarstellung über Körpern beliebiger Charakteristik betrachten, sofern nur Char $\mathsf{K} \nmid g_0$ gilt.

Wir stellen ε als Summe von primitiven orthogonalen Idempotenten $e_\varkappa \in \mathfrak{A}$ dar:

$$\varepsilon = e_1 + \cdots + e_r, \qquad e_\varkappa e_\lambda = \delta_{\varkappa\lambda} e_\lambda, \qquad \delta_{\varkappa\lambda} \text{ das Kronecker-Symbol.}$$

Dabei heißt ein Idempotent primitiv, wenn es von Null verschieden ist und nicht als Summe zweier orthogonaler idempotenter Elemente $\neq 0$ dargestellt werden kann. Genau dann ist ein Rechtsideal $e\mathfrak{A}$, $e^2 = e \neq 0$, direkt unzerlegbar, wenn e ein primitives Idempotent ist. Wegen $\varepsilon e_\varkappa = e_\varkappa \varepsilon = e_\varkappa$ gilt

$$e_\varkappa \in \varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon \qquad (\varkappa = 1, \ldots, r).$$

$$\varepsilon\mathfrak{A} = e_1\mathfrak{A} \oplus \cdots \oplus e_r\mathfrak{A}, \tag{2.2}$$

$$\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon = e_1(\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon) \oplus \cdots \oplus e_r(\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon) \tag{2.3}$$

sind Zerlegungen von $\varepsilon\mathfrak{A}$ und $\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$ in direkte Summen von direkt unzerlegbaren nicht nilpotenten Rechtsidealen von $\mathfrak{A}$ bzw. von $\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon$. Jedes der Ideale $e_\varkappa(\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon)$ zerfällt seinerseits in eine direkte Summe von K-Moduln $e_\varkappa\mathfrak{A}e_\lambda$, die zu den Ringen der $\mathfrak{A}$-homomorphen Abbildungen von $e_\lambda\mathfrak{A}$ in $e_\varkappa\mathfrak{A}$ invers isomorph sind:

$$e_\varkappa(\varepsilon\mathfrak{A}\varepsilon) = e_\varkappa\mathfrak{A}\varepsilon = e_\varkappa\mathfrak{A}e_1 \oplus \cdots \oplus e_\varkappa\mathfrak{A}e_r. \tag{2.4}$$

Insbesondere ist $e_\varkappa\mathfrak{A}e_\varkappa$ invers-isomorph zum $\mathfrak{A}$-Endomorphismenring von $e_\varkappa\mathfrak{A}$. $e_\varkappa\mathfrak{R}e_\varkappa$ ist das Radikal von $e_\varkappa\mathfrak{A}e_\varkappa$ [*1*, S. 100, Lemma 9.3 B]. $e_\varkappa\mathfrak{A}$ ist genau dann direkt unzerlegbar, wenn $e_\varkappa\mathfrak{A}e_\varkappa$ vollständig primär, d.h. $e_\varkappa\mathfrak{A}e_\varkappa/e_\varkappa\mathfrak{R}e_\varkappa$ ein Schiefkörper ist [*1*, S. 98, Theorem 9.2C].

Von nun an setzen wir über den Grundkörper K zweierlei voraus:

a) Jede über K irreduzible Darstellung von $\mathfrak{G}$ sei absolut irreduzibel,

b) K sei ein vollkommener Körper.

In unseren Anwendungen ist stets Char $\mathsf{K} = 0$ oder K ist ein Galoisfeld.

In einer $\mathfrak{A}$-Kompositionsreihe eines direkt unzerlegbaren nicht nilpotenten Rechtsideals $e_\varkappa\mathfrak{A}$ ist die Anzahl $\tilde{c}_{\varkappa\lambda}$ der Kompositionsfaktormoduln, die zu $e_\lambda\mathfrak{A}/e_\lambda\mathfrak{R}$ isomorph sind, gleich der Kompositionslänge von $e_\varkappa\mathfrak{A}e_\lambda$ als $e_\lambda\mathfrak{A}e_\lambda$-Rechtsmodul [*1*, S. 106, Coroll. 9.5C]. Auf Grund der Voraussetzung b) zerfällt

$$e_\lambda\mathfrak{A}e_\lambda = \mathfrak{k}_\lambda \oplus e_\lambda\mathfrak{R}e_\lambda,$$

wobei $\mathfrak{k}_\lambda$ zum Schiefkörper $e_\lambda\mathfrak{A}e_\lambda/e_\lambda\mathfrak{R}e_\lambda$ isomorph ist [*1*, S. 110, 2. Absatz]. Aus a) folgt leicht $e_\lambda\mathfrak{A}e_\lambda/e_\lambda\mathfrak{R}e_\lambda \cong \mathsf{K}$. Nach [*1*, S. 105, Theorem 9.5A und S. 106, Remark] ist dann

$$\tilde{c}_{\varkappa\lambda} = (e_\varkappa\mathfrak{A}e_\lambda : \mathsf{K}). \tag{2.5}$$

Aus $e_\varkappa\mathfrak{A}\cong e_{\varkappa'}\mathfrak{A}$ und $e_\lambda\mathfrak{A}\cong e_{\lambda'}\mathfrak{A}$ folgt $\tilde{c}_{\varkappa\lambda}=\tilde{c}_{\varkappa'\lambda'}$. Es seien

$$A_1, \ldots, A_s$$

die Klassen isomorpher direkt unzerlegbarer nicht nilpotenter Rechtsideale von $\mathfrak{A}$. Man setzt

$$c_{\mu\nu}=\tilde{c}_{\varkappa\lambda}, \text{ wenn } e_\varkappa\mathfrak{A}\in A_\mu, \quad e_\lambda\mathfrak{A}\in A_\nu.$$

Die $c_{\mu\nu}$ sind die wichtigen *Cartan-Invarianten* in der Theorie der Ringe mit Minimalbedingung. Nehmen wir an, daß in der Zerlegung (2.2) v_μ Ideale $e_\varkappa\mathfrak{A}$ auftreten, die in A_μ liegen, dann folgt aus (1.5), (2.3), (2.4) und (2.5)

(2.6) *Es ist* $$t=\sum_{\varkappa,\lambda=1}^{r}(e_\varkappa\mathfrak{A}\,e_\lambda:\mathsf{K})=\sum_{\varkappa,\lambda=1}^{r}\tilde{c}_{\varkappa\lambda}=\sum_{\mu,\nu=1}^{s}c_{\mu\nu}v_\mu v_\nu.$$

Für halbeinfache Algebren gilt $c_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}$ (Kronecker-Symbol). Als Spezialfall von (2.6) erhalten wir die Formel (2.1).

(2.7) *Ist* $\mathfrak{A}$ *halbeinfach, so gilt* $$t=\sum_{\mu=1}^{s}v_\mu^2.$$

v_μ ist dann die Vielfachheit der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_\mu(\mathfrak{G})$ in der vollständig reduziblen Permutationsdarstellung $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ über K.

3.

Es besteht nun die Aufgabe, die Besonderheiten des Gruppenrings zur Bestimmung der Struktur von $\varepsilon\mathfrak{A}$ heranzuziehen. Wir machen hierzu einige Bemerkungen.

$e_\varkappa\mathfrak{R}$ ist das einzige maximale Rechtsideal im direkt unzerlegbaren nicht nilpotenten Rechtsideal $e_\varkappa\mathfrak{A}$. In $e_\varkappa\mathfrak{A}$ liegt aber auch nur ein einziges minimales Rechtsideal $\mathfrak{M}_\varkappa$ und überdies gilt

$$\mathfrak{M}_\varkappa\cong e_\varkappa\mathfrak{A}/e_\varkappa\mathfrak{R}.$$

Mehr noch: $e_\varkappa\mathfrak{R}$ ist das kleinste Rechtsideal $\mathfrak{B}$ in $e_\varkappa\mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft, daß $e_\varkappa\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ vollständig reduzibel ist, und $\mathfrak{M}_\varkappa$ ist das größte vollständig reduzible Rechtsideal in $e_\varkappa\mathfrak{A}$ ([*18*, Theoreme 8, 2, 3, 2', 3'], weil jeder Gruppenring eine symmetrische Algebra ist [*18*, S. 657]).

(3.1) *Es ist* $e_\varkappa\mathfrak{A}\cong e_\lambda\mathfrak{A}$ *genau dann, wenn* $e_\varkappa\mathfrak{A}/e_\varkappa\mathfrak{R}\cong e_\lambda\mathfrak{A}/e_\lambda\mathfrak{R}$, *und* $e_\varkappa\mathfrak{A}\cong e_\lambda\mathfrak{A}$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{M}_\varkappa\cong\mathfrak{M}_\lambda$.

Greifen wir auf die Zerlegung (2.2) von $\varepsilon\mathfrak{A}$ zurück. $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{M}_r$ ist der maximale vollständig reduzible $\mathfrak{A}$-Rechtsmodul in $\varepsilon\mathfrak{A}$. Denn ist $\mathfrak{L}$ ein minimales Rechtsideal in $\varepsilon\mathfrak{A}$, $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_r\in\mathfrak{L}$, $\alpha_\varkappa\in e_\varkappa\mathfrak{A}$, dann ist die Abbildung $\alpha\to\alpha_\varkappa$ ein $\mathfrak{A}$-Homomorphismus $\pi_\varkappa$ von $\mathfrak{L}$ in $e_\varkappa\mathfrak{A}$. Es ist $\pi_\varkappa=0$ oder $\pi_\varkappa$ ist ein $\mathfrak{A}$-Isomorphismus, weil $\mathfrak{L}$ ein minimales Rechtsideal ist. $e_\varkappa\mathfrak{A}$ enthält aber außer $\mathfrak{M}_\varkappa$ kein weiteres Rechtsideal, so daß $\mathfrak{L}\pi_\varkappa=\mathfrak{M}_\varkappa$ ist, falls $\pi_\varkappa\neq 0$. Mithin ist $\alpha_\varkappa\in\mathfrak{M}_\varkappa$ und $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{M}_r$. Die umgekehrte Enthaltenseinsbeziehung ist trivial. Somit folgt aus (3.1)

(3.2) *Der maximale vollständig reduzible* $\mathfrak{A}$*-Rechtsmodul* $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{M}_r$ *in* $\varepsilon\mathfrak{A}$ *bestimmt eindeutig die Struktur von* $\varepsilon\mathfrak{A}$.

Eine besondere Rolle spielt das Element

$$\eta = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon R_i = \sum_{k=0}^{t-1} \delta_k = \frac{1}{g_0} \sum_{G \in \mathfrak{G}} G \in \varepsilon \mathfrak{A} \varepsilon .$$

$\eta \mathfrak{A} = \mathsf{K}\eta$ ist ein minimales (zweiseitiges) Ideal, auf dem $\mathfrak{G}$ die identische Darstellung erfährt. $\varepsilon \mathfrak{A}$ enthält daher ein direkt unzerlegbares nicht nilpotentes Rechtsideal $e_1 \mathfrak{A}$ zur identischen Darstellung von $\mathfrak{G}: e_1 \mathfrak{A}/e_1 \mathfrak{R} \cong \mathsf{K}\eta$. $\mathfrak{A}$ besitzt aber nur $(e_1 \mathfrak{A}/e_1 \mathfrak{R} : \mathsf{K}) = 1$ solches Ideal.

(3.3) *$\varepsilon \mathfrak{A}$ enthält das direkt unzerlegbare nicht nilpotente Rechtsideal zur identischen Darstellung, das wir stets mit $e_1 \mathfrak{A}$ bezeichnen wollen. $\mathsf{K}\eta$ ist das minimale Rechtsideal in $e_1 \mathfrak{A}$.*

Gilt Char $\mathsf{K} \nmid g$, so ist $\mathfrak{A}$ halbeinfach und $e_1 \mathfrak{A} = \mathsf{K}\eta$. Betrachten wir nun den Fall, daß *Char* $\mathsf{K} = p \neq 0$ die Gruppenordnung g teilt, $p \nmid g_0$. Über K machen wir die Voraussetzungen a) und b) von Abschnitt 2. Beachten wir, daß $\mathfrak{G}$ auf $e_\varkappa \mathfrak{A}$ eine unzerlegbare modulare Darstellung $\mathfrak{U}_\varkappa$ des Grades $u_\varkappa = (e_\varkappa \mathfrak{A} : \mathsf{K})$ erleidet, so folgt aus [3, (18)]

(3.4) *Ist* Char $\mathsf{K} = p \mid g$, *p^a die höchste p-Potenz, die in g aufgeht, dann gilt für jedes direkt unzerlegbare nicht nilpotente Rechtsideal $e_\varkappa \mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$ die Kongruenz* $(e_\varkappa \mathfrak{A} : \mathsf{K}) \equiv 0 \pmod{p^a}$.

Insbesondere ist $(e_1 \mathfrak{A} : \mathsf{K}) > 1$, so daß jede $\mathfrak{A}$-Kompositionsreihe von $e_1 \mathfrak{A}$ mindestens die zwei Faktormoduln $e_1 \mathfrak{A}/e_1 \mathfrak{R}$ und $\mathsf{K}\eta$ zur identischen Darstellung enthält. Für die Cartan-Invariante c_{11}, die angibt, wieviele Faktormoduln isomorph zu $\mathsf{K}\eta$ in einer $\mathfrak{A}$-Kompositionsreihe von $e_1 \mathfrak{A}$ auftreten, gilt also die Ungleichung

$$c_{11} \geqq 2 .$$

(3.5) *Ist $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv, Char* $\mathsf{K} = p \mid g$, *$p \nmid g_0$, so ist die Cartan-Invariante $c_{11} = 2$ und $\varepsilon \mathfrak{A} = e_1 \mathfrak{A}$ ist direkt unzerlegbar.*

Denn aus (2.6) und (3.3) folgt $2 = t \geqq c_{11} \geqq 2$.

Unter den gleichen Voraussetzungen ist η ein nilpotentes Element:

$$\eta^2 = \frac{g}{g_0} \eta = 0, \quad \text{wenn } \mathit{Char}\, \mathsf{K} \mid g .$$

Während wir mit $\mathsf{K}\eta$ das minimale Rechtsideal von $e_1 \mathfrak{A}$ in der Hand haben, ist es nicht so leicht, $e_1 \mathfrak{A}$ selbst zu bestimmen. Doch mag eine Bemerkung hierfür nützlich sein. Eine Zerlegung $\varepsilon G = \varepsilon + (\varepsilon G - \varepsilon)$, $G \in \mathfrak{G}$ legt es nahe, den K-Modul $\mathfrak{W} = \sum_{G \in \mathfrak{G}} \mathsf{K}(\varepsilon G - \varepsilon)$ zu betrachten.

(3.6) *$\mathfrak{W}$ ist ein Rechtsideal in $\varepsilon \mathfrak{A}$ des Ranges* $(\mathfrak{W} : \mathsf{K}) = n - 1$. *Auf dem Faktormodul $\varepsilon \mathfrak{A}/\mathfrak{W} \cong \mathsf{K}\eta$ erfährt $\mathfrak{G}$ die identische Darstellung. $\mathfrak{W}$ besteht aus genau den Elementen $\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varepsilon R_i \in \varepsilon \mathfrak{A}$ mit $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = 0$.*

Beweis. Die Elemente $\varepsilon R_i - \varepsilon (i = 1, \ldots, n-1)$ sind linear unabhängig und spannen $\mathfrak{W}$ auf. Es ist $(\varepsilon R_i - \varepsilon) G = \varepsilon R_{(i\sigma)} - \varepsilon R_{(\sigma\sigma)} = (\varepsilon R_{(i\sigma)} - \varepsilon) - (\varepsilon R_{(\sigma\sigma)} - \varepsilon) \in \mathfrak{W}$. Die übrigen Behauptungen sind leicht nachzuprüfen.

Ein Rechtsideal $e_\varkappa \mathfrak{A} \subseteqq \varepsilon \mathfrak{A}$ ist in $\mathfrak{W}$ enthalten, oder es ist $e_\varkappa \mathfrak{A} + \mathfrak{W} = \varepsilon \mathfrak{A}$ und $\mathsf{K}\eta \cong \varepsilon \mathfrak{A}/\mathfrak{W} = e_\varkappa \mathfrak{A} + \mathfrak{W}/\mathfrak{W} \cong e_\varkappa \mathfrak{A}/e_\varkappa \mathfrak{A} \cap \mathfrak{W}$. Die letzte Beziehung ist nur für $e_\varkappa \mathfrak{A} = e_1 \mathfrak{A}$ möglich mit $e_1 \mathfrak{A} \cap \mathfrak{W} = e_1 \mathfrak{R}$.

(3.7) *Für die Ideale $e_\varkappa \mathfrak{A}$ einer Zerlegung* (2.2) *von $\varepsilon \mathfrak{A}$ gilt:*

a) $e_\varkappa \mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{W}$ *für alle* $\varkappa \neq 1$,

b) $e_1 \mathfrak{A} + \mathfrak{W} = \varepsilon \mathfrak{A}$, $e_1 \mathfrak{A} \cap \mathfrak{W} = e_1 \mathfrak{R}$,

c) $\varepsilon \mathfrak{A}/\mathfrak{W} = \mathsf{K}(\varepsilon + \mathfrak{W}) = \mathsf{K}(e_1 + \mathfrak{W})$.

Wir können (3.7) auch so formulieren:

(3.8) *Ist $\varepsilon = e_1 + \cdots + e_r$ eine Darstellung von ε als Summe primitiver orthogonaler idempotenter Elemente $e_\varkappa \in \mathfrak{A}$, so gibt es unter den $e_\varkappa$ genau eines, etwa $e_1 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varepsilon R_i$, mit von Null verschiedener Koeffizientensumme: $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = 1$. $e_1 \mathfrak{A}$ ist das direkt unzerlegbare nicht nilpotente Rechtsideal zur identischen Darstellung von $\mathfrak{G}$.*

4.

Die Formel (2.6) gestattet es, Gruppenringe über Körpern verschiedener Charakteristik zur Bestimmung von t heranzuziehen. Darin liegt die Bedeutung von (2.6). Mehr als unsere bisherigen Erörterungen trägt hierzu die modulare Darstellungstheorie bei.

Wir wählen in diesem Abschnitt als Grundkörper K einen algebraischen Zahlkörper Ω, über dem jede irreduzible Darstellung von $\mathfrak{G}$ absolut irreduzibel ist. Ω kann z. B. der Körper der e-ten Einheitswurzeln sein, wenn e der Exponent von $\mathfrak{G}$ ist [*19*, S. 151, VI].

p sei eine Primzahl, die die Gruppenordnung g, aber nicht g_0 teilt. Sei $\mathfrak{o}$ der Ring der ganzen algebraischen Zahlen in Ω und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}$, das p teilt. Ist ν die zu $\mathfrak{p}$ gehörige exponentielle Bewertung von Ω [auf $\nu(p) = 1$ normiert], dann sei $\mathfrak{o}_\nu$ der Ring der für $\mathfrak{p}$ ganzen Zahlen, $\mathfrak{p}_\nu$ das Primideal von $\mathfrak{o}_\nu$, das $\mathfrak{p}$ teilt, und π ein Primelement *modulo* $\mathfrak{p}_\nu$. Wir bezeichnen mit $\tilde{\Omega}$ den Restklassenkörper $\mathfrak{o}_\nu/\mathfrak{p}_\nu \cong \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ und mit $\tilde{a}$ die Restklasse *modulo* $\mathfrak{p}_\nu$ des Elementes $a \in \mathfrak{o}_\nu$.

Wir betrachten den Unterring $\mathfrak{B}$ des Gruppenringes $\mathfrak{A} = \Omega[\mathfrak{G}]$, der aus den Linearkombinationen der Gruppenelemente mit für $\mathfrak{p}$ ganzen Zahlen als Koeffizienten besteht:

$$\mathfrak{B} = \left\{ \sum_{G \in \mathfrak{G}} b_G G \,|\, b_G \in \mathfrak{o}_\nu \right\}.$$

Beschränken wir uns auf Koeffizienten aus $\mathfrak{p}_\nu$, so erhalten wir ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{C} = \left\{ \sum_{G \in \mathfrak{G}} c_G G \,|\, c_G \in \mathfrak{p}_\nu \right\} = \pi \mathfrak{B}.$$

Der Restklassenring $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ ist isomorph zum Gruppenring $\tilde{\mathfrak{A}}$ über dem Restklassenkörper $\tilde{\Omega}$. Wir können die Elemente aus $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ mit den Elementen aus $\tilde{\mathfrak{A}}$ identifizieren, indem wir die Koeffizienten $b_G \in \mathfrak{v}$, der $\beta \in \mathfrak{B}$ *modulo* $\mathfrak{p}$, rechnen, oder sogleich zu den Restklassen $\tilde{b}_G \in \tilde{\Omega}$ übergehen:

$$\mathfrak{B} \ni \beta = \sum_{G \in \mathfrak{G}} b_G G \to \tilde{\beta} = \sum_{G \in \mathfrak{G}} \tilde{b}_G G \in \tilde{\mathfrak{A}}.$$

Dieser Übergang von $\mathfrak{B}$ nach $\tilde{\mathfrak{A}}$ spielt in der modularen Darstellungstheorie eine grundlegende Rolle ([3], [9] und [1, S. 111 ff.]). Um es deutlich zu machen, daß ein Element in $\tilde{\mathfrak{A}}$ liegen soll, setzen wir immer ein $\tilde{}$ darüber, z. B.

$$\tilde{\varepsilon} = \left(\frac{\widetilde{1}}{g_0}\right) \sum_{G_0 \in \mathfrak{G}_0} G_0 \in \tilde{\mathfrak{A}}, \qquad \tilde{\delta}_k = \sum_{i \in \Delta_k} \tilde{\varepsilon} R_i \in \tilde{\mathfrak{A}}.$$

Der Zerlegung

$$\varepsilon \mathfrak{A} = e_1 \mathfrak{A} \oplus \cdots \oplus e_r \mathfrak{A} \tag{4.1}$$

von $\varepsilon \mathfrak{A}$ in eine direkte Summe von minimalen Rechtsidealen $e_\varrho \mathfrak{A}$ tritt jetzt eine Zerlegung

$$\tilde{\varepsilon} \tilde{\mathfrak{A}} = \tilde{g}_1 \tilde{\mathfrak{A}} \oplus \cdots \oplus \tilde{g}_s \tilde{\mathfrak{A}} \tag{4.2}$$

von $\tilde{\varepsilon} \tilde{\mathfrak{A}}$ in eine direkte Summe von direkt unzerlegbaren nicht nilpotenten Rechtsidealen $\tilde{g}_\sigma \tilde{\mathfrak{A}}$ zur Seite. (Die primitiven Idempotenten $\tilde{g}_\sigma$ in $\tilde{\varepsilon} \tilde{\mathfrak{A}}$ gehen i. a. nicht durch Restklassenbildung aus den e_ϱ hervor. Zu jedem $\tilde{g}_\sigma$ gibt es aber ein Idempotent $g_\sigma \in \mathfrak{B}$ so, daß die Restklasse modulo $\mathfrak{C}$ von g_σ gleich $\tilde{g}_\sigma$ ist [1, S. 115, Lemma 9.8 E].)

Der Zerlegung (4.1) entsprechend zerfällt die Permutationsdarstellung $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ über Ω in irreduzible Bestandteile $\mathfrak{D}_\varkappa(\mathfrak{G})$ der Vielfachheit $v_\varkappa$ und der Charakter χ von $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ in die zugehörigen irreduziblen Charaktere $\chi_\varkappa$:

$$\chi(G) = \sum_\varkappa v_\varkappa \chi_\varkappa(G), \qquad G \in \mathfrak{G}. \tag{4.3}$$

Bezeichnen wir die modularen Charaktere der irreduziblen modularen Darstellungen $\mathfrak{F}_\lambda$ von $\mathfrak{G}$ mit φ_λ, so gilt [9, (3.5)]

$$\chi_\varkappa(G) = \sum_\lambda d_{\varkappa\lambda} \varphi_\lambda(G), \qquad p \nmid Ord\, G, \qquad d_{\varkappa\lambda} \geqq 0 \text{ ganz rational.} \tag{4.4}$$

(Für die Definition der modularen Charaktere verweisen wir auf die Arbeiten [3], [9] von R. Brauer.) Die Zerlegungszahlen $d_{\varkappa\lambda}$ hängen mit den Cartan-Invarianten $c_{\lambda\mu}$ zusammen durch die Formel ([1, S. 117, (8.8)] oder [9, (3.8)])

$$c_{\lambda\mu} = \sum_\varkappa d_{\varkappa\lambda} d_{\varkappa\mu} = c_{\mu\lambda}. \tag{4.5}$$

Wird durch

$$\Phi_\lambda(G) = \sum_\varkappa d_{\varkappa\lambda} \chi_\varkappa(G) \tag{4.6}$$

ein (gewöhnlicher) Charakter Φ_λ definiert, so stimmt dieser wegen

$$\Phi_\lambda(G) = \sum_\varkappa d_{\varkappa\lambda} \sum_\mu d_{\varkappa\mu} \varphi_\mu(G) = \sum_\mu c_{\lambda\mu} \varphi_\mu(G), \qquad p \nmid Ord\, G$$

auf den Elementen mit zu p teilerfremder Ordnung (kurz: *p-reguläre Elemente* genannt) mit dem modularen Charakter derjenigen unzerlegbaren modularen Darstellung $\mathfrak{U}_\lambda$ überein, die $\mathfrak{G}$ auf einem direkt unzerlegbaren nicht nilpotenten Rechtsideal $\tilde{g}_\sigma \tilde{\mathfrak{A}}$ zur irreduziblen modularen Darstellung $\mathfrak{F}_\lambda$ erfährt [*1*, S. 106, Coroll. 9.5 C].

Gemäß der Zerlegung (4.2) zerfällt die Permutationsdarstellung $\tilde{\mathfrak{D}}(\mathfrak{G})$ über $\tilde{\Omega}$ in unzerlegbare Bestandteile $\mathfrak{U}_\lambda$ der Vielfachheit w_λ und der modulare Charakter Φ von $\tilde{\mathfrak{D}}(\mathfrak{G})$ in die zugehörigen Φ_λ:

$$\Phi(G) = \sum_\lambda w_\lambda \Phi_\lambda(G), \qquad p \nmid Ord\, G. \tag{4.8}$$

Die Darstellung $\tilde{\mathfrak{D}}(\mathfrak{G})$ geht aus der Darstellung $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ dadurch hervor, daß man in den Koeffizienten der Matrizen $\mathfrak{D}(G)$ zu den Restklassen *mod* $\mathfrak{p}$, übergeht. Daher gilt auf Grund der Definition der modularen Charaktere

$$\Phi(G) = \chi(G), \quad \text{wenn } p \nmid Ord\, G. \tag{4.9}$$

Nun gilt für alle λ $\Phi_\lambda(G) = 0$, wenn $p \mid Ord\, G$ [*9*, S. 415, (3 F)]. Andererseits ist unter der Voraussetzung $p \nmid g_0$ auch $\chi(G) = 0$, wenn $p \mid Ord\, G$. Denn ist G ein Element mit durch p teilbarer Ordnung, dann ist die Anzahl der Nebenklassen $\mathfrak{G}_0 H$ in einem beliebigen Komplex $\mathfrak{G}_0 A \langle G \rangle$ der Doppelmodulzerlegung von $\mathfrak{G}$ nach dem Doppelmodul $(\mathfrak{G}_0, \langle G \rangle)$ gleich $|\langle G \rangle : \langle G \rangle \cap A^{-1} \mathfrak{G}_0 A|$, also durch p teilbar [*21*, S. 63]. Folglich läßt G keine Ziffer fest, es ist $\chi(G) = 0$, (4.9) gilt für alle $G \in \mathfrak{G}$.

(4.10) SATZ. *Teilt die Primzahl p die Gruppenordnung g, aber nicht die Ordnung von $\mathfrak{G}_0$, dann gilt für den Charakter χ der Permutationsdarstellung $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ über dem Körper Ω*

$$\chi(G) = \sum_\varkappa v_\varkappa \chi_\varkappa(G) = \sum_\lambda w_\lambda \Phi_\lambda(G) \quad \textit{für alle } G \in \mathfrak{G},$$

$$v_\varkappa = \sum_\lambda d_{\varkappa\lambda} w_\lambda, \quad d_{\varkappa\lambda} \textit{ die Zerlegungszahlen von } \mathfrak{G} \textit{ bezüglich } p.$$

Für die Anzahl t der Transitivitätsgebiete von $\mathfrak{G}_0$ gilt

$$t = \sum_\varkappa v_\varkappa^2 = \sum_{\lambda,\mu} c_{\lambda\mu} w_\lambda w_\mu, \quad c_{\lambda\mu} \textit{ die Cartan-Invarianten von } \mathfrak{G} \textit{ bezüglich } p.$$

Den zweiten Ausdruck für t erhält man, indem man $v_\varkappa = \sum_\lambda d_{\varkappa\lambda} w_\lambda$ in (2.7) einsetzt und (4.5) benützt. Mit Hilfe dieses Satzes gelingt es, eine Fülle von Tatsachen aus der modularen Darstellungstheorie zur Bestimmung von t oder zur Abschätzung von t heranzuziehen. Wir nennen — um einen ungefähren Eindruck von den Möglichkeiten zu vermitteln — nur einige wenige Sätze und setzen $g = p^a g'$, $(p, g') = 1$.

(4.11) *Stets ist* Grad $\Phi_\lambda \equiv 0 \pmod{p^a}$ [3, S. 562 (18)].

(4.12) *Es ist* $\Phi_\lambda = \chi_\varkappa$, *wenn* $d_{\varkappa\lambda} \neq 0$ *und* Grad $\chi_\varkappa \equiv 0 \pmod{p^a}$ [9, S. 423 (6E)].

(4.13) *Gilt* Grad $\chi_\varkappa \equiv 0 \pmod{p^{a-1}}$ *und* Grad $\chi_\varkappa \not\equiv 0 \pmod{p^a}$, *so ist* $d_{\varkappa\lambda} = 1$ *oder* $d_{\varkappa\lambda} = 0$ [5, S. 947, Theorem 5].

Wenn p nur in erster Potenz in g aufgeht, $p \nmid g_0$, so trifft für ein beliebiges $\chi_\varkappa$ (4.12) oder (4.13) zu. Die $d_{\varkappa\lambda}$ können dann nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Darüber hinaus stehen viele weitere Aussagen über die gewöhnlichen und die modularen irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{G}$ aus den Arbeiten [6], [7] und [8] von R. BRAUER zur Verfügung. Wir wollen uns hier mit diesen sehr unvollkommenen Andeutungen über die Anwendungsmöglichkeiten der modularen Darstellungstheorie auf die Untersuchung transitiver Permutationsgruppen begnügen.

5.

Wir haben uns ganz auf den Fall Char $\mathsf{K} \nmid g_0$ beschränkt. Doch ist der Grundgedanke der Theorie wohl auch im allgemeinen Falle brauchbar. Das idempotente Element ε des Ideals $\varepsilon\mathfrak{A}_0$ zur identischen Darstellung von $\mathfrak{G}_0$ hat dann jedoch nicht mehr die Form $\frac{1}{g_0}\sum_{G_0 \in \mathfrak{G}_0} G_0$, wenn Char $\mathsf{K} | g_0$. Vielmehr erzeugt $\eta_0 = \sum_{G_0 \in \mathfrak{G}_0} G_0$ das eindeutig bestimmte minimale Rechtsideal $\eta_0\mathfrak{A}_0 = \mathsf{K}\eta_0$ von $\varepsilon\mathfrak{A}_0$, das im Radikal von $\mathfrak{A}_0$ liegt.

Das Ideal $\varepsilon\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$ enthält den Darstellungsmodul $\mathfrak{r} = \eta_0\mathfrak{A}$ zur Permutationsdarstellung $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$, der von den Elementen $\eta_0 R_i$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ aufgespannt wird (und von dem andeutungsweise in der Einleitung die Rede war). Die Linksmultiplikationen mit den Größen $\eta_0 G \eta_0$ liegen im inversen $\mathfrak{A}$-Endomorphismenring von $\eta_0\mathfrak{A}$. Es ist $\eta_0 G \eta_0 = 0$, wenn $p \,|\, |\mathfrak{G}_{0i}|$ $\left((1.3)\text{ mit }\eta_0\text{ statt }\varepsilon\text{ und }|\mathfrak{G}_{0i}|\text{ an Stelle von }\frac{1}{n_k}\right)$. Dadurch wird die Beziehung (1.5) zwischen der Anzahl t der Transitivitätsgebiete von $\mathfrak{G}_0$ und dem Rang des $\mathfrak{A}$-Endomorphismenringes von $\eta_0\mathfrak{A}$ in Frage gestellt. $\eta_0\mathfrak{A}$ könnte darüber hinaus ein nilpotentes Ideal sein. Dann versagen auch die Formeln von Abschnitt 4.

Diese Gründe lassen es ratsam erscheinen, $\varepsilon\mathfrak{A}$ und nicht allein $\mathfrak{r} = \eta_0\mathfrak{A}$ zu untersuchen und die Beziehungen zwischen den direkt unzerlegbaren nicht nilpotenten Rechtsidealen in $\varepsilon\mathfrak{A}$ und $\eta_0\mathfrak{A}$ zu erforschen. Soviel zur Begründung und zum Verständnis des sehr allgemein gehaltenen Programms der Einleitung.

6.

Wir gehen noch kurz auf die Untersuchungen der *"double coset matrices"* von J. S. FRAME ein ([13] bis [16]). Jeder Untergruppe $\mathfrak{U}$ der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$, in deren Ordnung Char K nicht aufgeht, ordnen wir das idempotente Element

$$\varepsilon_{\mathfrak{U}} = \frac{1}{|\mathfrak{U}|}\sum_{U \in \mathfrak{U}} U$$

des Gruppenrings $\mathfrak{A}=\mathsf{K}[\mathfrak{G}]$ zu ("subgroup averages" bei FRAME [*16*, S. 86ff.]). Wir betrachten zwei Untergruppen $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ mit dieser Eigenschaft und

$$\varepsilon_{\mathfrak{U}}=e_1+\cdots+e_r, \qquad \varepsilon_{\mathfrak{V}}=g_1+\cdots+g_{r'} \tag{6.1}$$

seien Darstellungen dieser Größen als Summen orthogonaler primitiver idempotenter Elemente. e_1, g_1 seien wie im 3. Abschnitt erzeugende Idempotente des direkt unzerlegbaren nicht nilpotenten Rechtsideals von $\mathfrak{A}$ zur identischen Darstellung von $\mathfrak{G}$. Geht Char K nicht in g auf, so ist $e_1=g_1=\varepsilon_{\mathfrak{G}}$.

(6.2) *$\varepsilon_{\mathfrak{U}}\mathfrak{A}\varepsilon_{\mathfrak{V}}$ ist invers isomorph zum Ring der $\mathfrak{A}$-homomorphen Abbildungen von $\varepsilon_{\mathfrak{V}}\mathfrak{A}$ in $\varepsilon_{\mathfrak{U}}\mathfrak{A}$.*

Denn gilt $\varepsilon_{\mathfrak{V}}\to\xi\in\varepsilon_{\mathfrak{U}}\mathfrak{A}$ bei einem $\mathfrak{A}$-Homomorphismus σ von $\varepsilon_{\mathfrak{V}}\mathfrak{A}$ in $\varepsilon_{\mathfrak{U}}\mathfrak{A}$, so ist $\varepsilon_{\mathfrak{V}}=\varepsilon_{\mathfrak{V}}\varepsilon_{\mathfrak{V}}\to\xi\varepsilon_{\mathfrak{V}}=\xi\in\varepsilon_{\mathfrak{U}}\mathfrak{A}\varepsilon_{\mathfrak{V}}$ und σ wird durch die Linksmultiplikation mit ξ dargestellt. Umgekehrt liefert jede Linksmultiplikation mit einem $\xi\in\varepsilon_{\mathfrak{U}}\mathfrak{A}\varepsilon_{\mathfrak{V}}$ einen solchen $\mathfrak{A}$-Homomorphismus.

Wir setzen $\mathfrak{G}=\bigcup_{i=0}^{m-1}\mathfrak{U}R_i=\bigcup_{j=0}^{n-1}\mathfrak{V}S_j$, $m=|\mathfrak{G}:\mathfrak{U}|$, $n=|\mathfrak{G}:\mathfrak{V}|$.

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{U}H_0\mathfrak{V}\cup\ldots\cup\mathfrak{U}H_{z-1}\mathfrak{V} \tag{6.3}$$

sei die Zerlegung von $\mathfrak{G}$ nach dem Doppelmodul $(\mathfrak{U},\mathfrak{V})$ [*21*, S. 63].

(6.4) *Die Elemente*

$$\gamma_k=|\mathfrak{V}:\mathfrak{V}\cap H_k^{-1}\mathfrak{U}H_k|\,\varepsilon_{\mathfrak{U}}H_k\varepsilon_{\mathfrak{V}}=\sum_{i=0}^{m-1}d_{ki}\varepsilon_{\mathfrak{U}}R_i,$$

$$d_{ki}=\begin{cases}1 & \text{für } \mathfrak{U}R_i\mathfrak{V}=\mathfrak{U}H_k\mathfrak{V}\\ 0 & \text{sonst},\end{cases}$$

sind umkehrbar eindeutig den z Komplexen der Doppelmodulzerlegung (6.3) *zugeordnet. Sie bilden eine* K*-Basis von $\varepsilon_{\mathfrak{U}}\mathfrak{A}\varepsilon_{\mathfrak{V}}$; es ist $(\varepsilon_{\mathfrak{U}}\mathfrak{A}\varepsilon_{\mathfrak{V}}:\mathsf{K})=z$.*

Wir wenden die γ_k auf die Basis $\varepsilon_{\mathfrak{V}}S_j$ $(j=0,\ldots,n-1)$ von $\varepsilon_{\mathfrak{V}}\mathfrak{A}$ an:

$$\gamma_k(\varepsilon_{\mathfrak{V}}S_j)=\sum_{h=0}^{m-1}d_{kh}\varepsilon_{\mathfrak{U}}R_hS_j=\sum_{i=0}^{m-1}c_{ji}^{(k)}\varepsilon_{\mathfrak{U}}R_i, \quad c_{ji}^{(k)}=\begin{cases}1, & \text{wenn } R_iS_j^{-1}\in\mathfrak{U}H_k\mathfrak{V}\\ 0 & \text{sonst}.\end{cases} \tag{6.5}$$

Jedem γ_k ist damit eine Matrix $C_k=(c_{ji}^{(k)})_{\substack{j=0,\ldots,n-1\\ i=0,\ldots,m-1}}$ zugeordnet, die "double coset matrix" bei FRAME [*15*, S. 742 (2.5)]. C_k *„verkettet"* die Darstellung von $\mathfrak{G}$ bezüglich der Basis $\varepsilon_{\mathfrak{U}}R_i$ von $\varepsilon_{\mathfrak{U}}\mathfrak{A}$ mit der Darstellung bezüglich der Basis $\varepsilon_{\mathfrak{V}}S_j$ von $\varepsilon_{\mathfrak{V}}\mathfrak{A}$ analog zu (1.10): $D_{\mathfrak{V}}(G)C_k=C_kD_{\mathfrak{U}}(G)$, $G\in\mathfrak{G}$.

(2.2) entsprechend gewinnen wir aus (6.1) Zerlegungen

$$\varepsilon_{\mathfrak{U}}\mathfrak{A}=e_1\mathfrak{A}\oplus\cdots\oplus e_r\mathfrak{A}, \qquad \varepsilon_{\mathfrak{V}}\mathfrak{A}=g_1\mathfrak{A}\oplus\cdots\oplus g_{r'}\mathfrak{A} \tag{6.6}$$

von $\varepsilon_{\mathfrak{U}}\mathfrak{A}$ und $\varepsilon_{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}$ in direkte Summen direkt unzerlegbarer nicht nilpotenter Rechtsideale und daraus analog zu (2.3), (2.4)

$$\varepsilon_{\mathfrak{U}}\mathfrak{A}\,\varepsilon_{\mathfrak{B}} = \sum_{\varkappa=1}^{r}\sum_{\lambda=1}^{r'}\oplus e_\varkappa\mathfrak{A}\,g_\lambda. \tag{6.7}$$

Wir machen über K die Voraussetzungen a) und b) von Abschnitt 2. Sind in den Zerlegungen (6.6) u_μ Ideale $e_\varkappa\mathfrak{A}$ aus der Klasse A_μ und v_ν Ideale $g_\lambda\mathfrak{A}$ aus der Klasse A_ν vorhanden, so folgt mit den Cartan-Invarianten $c_{\mu\nu}$ wie im Abschnitt 2 mit Hilfe von

$$(e_\varkappa\mathfrak{A}\,g_\lambda:\mathsf{K}) = c_{\mu\nu}, \quad \text{wenn } e_\varkappa\mathfrak{A}\in A_\mu, \qquad g_\lambda\mathfrak{A}\in A_\nu:$$

(6.8) *Für die Anzahl z der Komplexe in der Doppelmodulzerlegung* (6.3) *gilt*

$$z = \sum_{\varkappa=1}^{r}\sum_{\lambda=1}^{r'}(e_\varkappa\mathfrak{A}\,g_\lambda:\mathsf{K}) = \sum_{\mu,\nu=1}^{s} c_{\mu\nu}\,u_\mu\,v_\nu.$$

(6.9) *Ist $\mathfrak{A}$ halbeinfach, so gilt* $z = \sum_{\mu=1}^{s} u_\mu v_\mu$ [*14*, S. 88 (5.2)].

Betrachten wir (6.9) für den Fall, daß K der Körper der komplexen Zahlen ist. Sind $\mathfrak{D}_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{D}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{G})$ Darstellungen, die $\mathfrak{G}$ auf $\varepsilon_{\mathfrak{U}}\mathfrak{A}$, $\varepsilon_{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}$ erfährt, dann ist nach FROBENIUS eine irreduzible Darstellung $\mathfrak{D}_\mu(\mathfrak{G})$ genau dann mit der Vielfachheit u_μ (bzw. v_μ) in $\mathfrak{D}_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{G})$ (bzw. $\mathfrak{D}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{G})$) enthalten, wenn $\mathfrak{D}_\mu(\mathfrak{U})$ (bzw. $\mathfrak{D}_\mu(\mathfrak{B})$) die identische Darstellung mit der Vielfachheit u_μ (bzw. v_μ) als irreduziblen Bestandteil besitzt. Diese Tatsache läßt sich zur Bestimmung der Anzahl t der Transitivitätsgebiete der Untergruppe $\mathfrak{G}_0$ einer transitiven Gruppe $\mathfrak{G}$ heranziehen, indem man $\mathfrak{G}_0=\mathfrak{U}$ setzt und beliebige Untergruppen $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$ betrachtet. Die Permutationsdarstellung von $\mathfrak{G}$ über dem Körper der komplexen Zahlen verfügt nur über solche irreduziblen Bestandteile $\mathfrak{D}_\mu(\mathfrak{G})$, für die außer $t=\sum_\mu u_\mu^2$ auch noch die Bedingung (6.9) erfüllt ist.

Literatur

[*1*] ARTIN, E., NESBITT, C. J. and R. M. THRALL: Rings with minimum condition (5th Printing 1955). — [*2*] BRAUER, R.: On Cartan-Invariants of groups of finite order. Ann. of Math. II. s. **42**, 53–61 (1941). — [*3*] BRAUER, R., and C. NESBITT: On the modular characters of groups. Ann. of Math., II. s. **42**, 556–590 (1941). — [*4*] BRAUER, R.: On the connection between the ordinary and the modular characters of groups of finite order. Ann. of Math., II. s. **42**, 926–935 (1941). — [*5*] BRAUER, R.: Investigation on group characters. Ann. of Math., II. ser. **42**, 936–958 (1941). — [*6*] BRAUER, R.: On groups whose order contains a prime number to the first power. I. Amer. J. Math. **64**, 401–420 (1942). — [*7*] BRAUER, R.: On groups whose order contains a prime number to the first power. II. Amer. J. Math. **64**, 421–440 (1942). — [*8*] BRAUER, R.: On Permutationgroups of prime degree and related classes of groups. Ann. of Math., II. s. **44**, 57–79 (1943). — [*9*] BRAUER, R.: Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung. Math. Z. **63**, 406–444 (1956). — [*10*] BURNSIDE, W.: On some properties of groups of odd order. Proc. London Math. Soc. **33**, 162–185 (1901). — [*11*] BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order, 2. Aufl. Cambridge: Cambridge University Press 1911; New York: Dover Publications 1955. — [*12*] DEURING, M.: Algebren. Ergebn. d. Math. 4 (1935). — [*13*] FRAME, J. S.: The double cosets of a

finite group. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 458–467 (1941). – [*14*] FRAME, J. S.: Double coset matrices and group characters. Bull. Amer. Math. Soc. **49**, 81–92 (1943). – [*15*] FRAME, J. S.: Group decomposition by double coset matrices. Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 740–755 (1948). – [*16*] FRAME, J. S.: An irreducible representation extracted from two permutation groups. Ann. of Math., II. s. **55**, 85–100 (1952). – [*17*] NAKAYAMA, T.: Some studies on regular representations, induced representations and modular representations. Ann. of Math., II. s. **39**, 361–369 (1938). – [*18*] NESBITT, C.: On the regular representations of algebras. Ann. of Math., II. s. **39**, 634–658 (1938). – [*19*] ROQUETTE, P.: Arithmetische Untersuchung des Charakterringes einer endlichen Gruppe. J. reine angew. Math. **190**, 148–168 (1952). – [*20*] SCHUR, I.: Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Kl. **1933**, 598–623. – [*21*] SPEISER, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 2. Aufl. 1927. – [*22*] WIELANDT, H.: Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. Math. Z. **40**, 582–587 (1935). – [*23*] WIELANDT, H.: Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. II. Math. Z. **52**, 384–393 (1949). – [*24*] WIELANDT, H.: Permutationsgruppen. Vorlesungen an der Universität Tübingen im Wintersemester 1954/55. – [*25*] VAN DER WAERDEN: Moderne Algebra I. 3. Aufl. 1950.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 8. Oktober 1959)

BEHRENS, E.-A.
Math. Zeitschr. 73, 409–432 (1960)

Distributiv darstellbare Ringe

Von
ERNST-AUGUST BEHRENS

Ein einfacher Ring $\mathfrak{R}$, der die Minimalbedingung für Linksideale erfüllt, besitzt in seinen minimalen Linksidealen treue, irreduzible $\mathfrak{R}$-Moduln $\mathfrak{m}$. Der Verband der $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$ ist trivialerweise distributiv, weil er nur aus dem Nullmodul und ganz $\mathfrak{m}$ besteht. Auch jeder halbeinfache Ring $\mathfrak{R}$ besitzt einen treuer $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{m}$ mit distributivem $\mathfrak{R}$-Untermodulverband, da $\mathfrak{R}$ direkte Summe einfacher Ringe $\mathfrak{R}_i$ ist und man für $\mathfrak{m}$ die gruppendirekte Summe je eines der obigen zu den einfachen Ringen gehörenden $\mathfrak{R}_i$-Moduln $\mathfrak{m}_i$ nehmen kann.

Dies legt es nahe, sich mit denjenigen Ringen $\mathfrak{R}$ zu beschäftigen, für die ein treuer $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{m}$ existiert mit distributivem $\mathfrak{R}$-Untermodulverband $V(\mathfrak{m})$. Wenn $\mathfrak{R}$ außerdem noch ein halbprimärer Ring ist, d.h. ein Einselement besitzt und in $\mathfrak{R}$ die Minimalbedingung für Linksideale erfüllt ist, heiße $\mathfrak{R}$ distributiv darstellbar.

In jedem halbprimären Ring $\mathfrak{R}$ gibt es ein Ideal $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$, das im Radikal $\mathfrak{W}(\mathfrak{R})$ des Ringes $\mathfrak{R}$ liegt, das der Regel $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}/\mathfrak{D}(\mathfrak{R}))=0$ genügt und das dann und nur dann gleich dem Nullideal ist, wenn $\mathfrak{R}$ subdirekte Summe distributiv darstellbarer Ringe ist (Satz 14).

Bereits die Untersuchung in BEHRENS [2] zeigte, daß die Frage, ob der Verband $V(\mathfrak{m})$ der $\mathfrak{R}$-Untermoduln des $\mathfrak{R}$-Moduls $\mathfrak{m}$ distributiv ist, sehr viel damit zu tun hat, wie sich $\mathfrak{m}$ bei denjenigen primären Unterringen von $\mathfrak{R}$ verhält, die in einer der bekannten Darstellungen $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1+\cdots+\mathfrak{R}_q+\mathfrak{N}$ der additiven Gruppe von $\mathfrak{R}$ als direkte Summe primärer Ringe $\mathfrak{R}_i$ und einer Gruppe $\mathfrak{N}$ aus dem Radikal $\mathfrak{W}(\mathfrak{R})$ auftreten. (Ein daraus abgeleitetes besonders handliches Kriterium für die Distributivität von $V(\mathfrak{m})$ findet man als Satz 1 in § 1 der vorliegenden Arbeit.) Daher scheint es zweckmäßig, mit der Untersuchung der distributiv darstellbaren primären Ringe zu beginnen (§ 2) und dann erst sich den halbprimären Ringen zuzuwenden (§ 3).

Da jeder den Ring $\mathfrak{R}$ distributiv darstellende Modul $\mathfrak{m}$ zyklisch ist (Satz 2), also $\mathfrak{R}$-isomorph ist zu dem mit einem geeigneten Linksideal $\mathfrak{l}$ gebildeten Faktormodul $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$, läuft die Untersuchung der distributiv darstellbaren Ringe $\mathfrak{R}$ und der zugehörigen Moduln $\mathfrak{m}$ auf die Frage nach denjenigen Linksidealen $\mathfrak{l}$ in $\mathfrak{R}$ hinaus, für die $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ ein treuer $\mathfrak{R}$-Modul und der Verband der $\mathfrak{l}$ enthaltenden Linksideale in $\mathfrak{R}$ distributiv ist.

Bei der Lösung dieser Aufgabe wirkt natürlich erschwerend, daß es Ringe gibt, die durchaus nicht kompliziert sind, die jedoch treue Moduln besitzen, welche zu einander nicht $\mathfrak{R}$-isomorph sind und trotzdem $\mathfrak{R}$ distributiv darstellen (§ 3, Beispiel 3). Es genügt also nicht, die distributive Darstellbarkeit

eines Ringes $\mathfrak{R}$ festzustellen (für primäre Ringe s. Sätze 3, 4, 5 und das Ende von § 2), sondern man muß auch die verschiedenen „distributiven $\mathfrak{R}$-Moduln", d.h. diejenigen treuen $\mathfrak{R}$-Moduln, deren Untermodulverband distributiv ist, angeben. In § 2 (Sätze 6 und 7) wird dies für primäre Ringe mit Hilfe der Kompositionsreihe eines festgehaltenen distributiven $\mathfrak{R}$-Moduls $\mathfrak{m}$ durchgeführt. Die dabei auftretenden Kompositionsfaktoren sind irreduzible $\mathfrak{R}$-Moduln, also treue $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}(\mathfrak{R})$-Moduln. Damit kommt derjenige Körper K in die Untersuchung herein, über dem $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}(\mathfrak{R})$ voller Matrizenring ist, und dies wiederum bedingt die Einschränkung der Fragestellung auf solche distributive $\mathfrak{R}$-Moduln, die gleichzeitig K-linear sind, d.h. für die die Elemente aus $\mathfrak{R}$ K-lineare Abbildungen induzieren. Die Frage, wann zwei solche Moduln $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}'$ zueinander $\mathfrak{R}$-isomorph sind, wird in § 3, gleich im größeren Rahmen der halbprimären Ringe, durch Beziehungen zwischen den Linksidealen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ beantwortet (Sätze 8 und 9).

Mit dem Begriff der Halbeinfachheit eines Ringes hat der der distributiven Darstellbarkeit gemeinsam, daß der volle Matrizenring $\mathfrak{R}_n$ über einem Ring $\mathfrak{R}$ dann und nur dann distributiv darstellbar ist, wenn $\mathfrak{R}$ es ist (Satz 10). Da jeder primäre Ring voller Matrizenring über einem vollständig primären Ring ist, führt dies dazu, daß für die distributive Darstellbarkeit eines halbprimären Ringes $\mathfrak{R}$ zumindest notwendig ist, daß alle diejenigen in ihm enthaltenen (vollständig primären) Ringe $\eta\mathfrak{R}\eta$, bei denen das Idempotent η ein unzerlegbares Linksideal $\mathfrak{R}\eta$ erzeugt, sich distributiv darstellen lassen (Satz 13). — Sehr einfach kann man zeigen, daß eine direkte Summe von Ringen dann und nur dann distributiv darstellbar ist, wenn jeder Summand diese Eigenschaft hat.

Der halbprimäre Ring $\mathfrak{R}$ ist selbst ein treuer $\mathfrak{R}$-Linksmodul. Der zugehörige $\mathfrak{R}$-Untermodulverband V besteht aus den Linksidealen in $\mathfrak{R}$. Nach BEHRENS [2], Korollar zu Satz 7, ist V dann und nur dann distributiv, wenn 1. jedes Linksideal in $\mathfrak{R}$ zweiseitiges Ideal ist und 2. in der dann möglichen Darstellung $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{R}_q$ mit vollständig primären Ringen $\mathfrak{R}_i$ für jedes i die $\mathfrak{W}(\mathfrak{R}_i)^k/\mathfrak{W}(\mathfrak{R}_i)^{k+1}$ als $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{W}(\mathfrak{R}_i)$-Linksmoduln zu einander isomorph sind.

§ 1

$\mathfrak{R}$ sei ein Ring mit Einselement 1, dessen Linksideale die Minimalbedingung erfüllen. $\mathfrak{m}$ sei ein unitaler $\mathfrak{R}$-Linksmodul, d.h. es gelte $1m=m$ für alle seine Elemente m. Mit $V(\mathfrak{m})$ sei der Verband der $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$ bezeichnet.

Für einen einfachen Ring $\mathfrak{R}$ ist, wie in BEHRENS [2], Satz 1, gezeigt wurde, die Distributivität des Verbandes $V(\mathfrak{m})$ mit der Irreduzibilität von $\mathfrak{m}$ äquivalent. Falls $\mathfrak{R}$ primär, also der Faktorring von $\mathfrak{R}$ nach seinem Radikal $\mathfrak{W}$ ein einfacher Ring ist, ist jeder Faktormodul $\mathfrak{W}^k\mathfrak{m}-\mathfrak{W}^{k+1}\mathfrak{m}$ der Kette

$$\mathfrak{m}=\mathfrak{W}^0\mathfrak{m}>\mathfrak{W}^1\mathfrak{m}>\cdots>\mathfrak{W}^s\mathfrak{m}=0 \tag{1}$$

direkte Summe zueinander isomorpher, irreduzibler $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$-Moduln. Daraus folgt, (BEHRENS [2], Satz 2) daß $V(\mathfrak{m})$ genau dann distributiv ist, wenn die

Kette (1) maximal, d.h. eine Kompositionsreihe ist oder, anders ausgedrückt, wenn der ganze Verband V nur aus der Kette (1) besteht. Insbesondere gilt daher, falls $\mathfrak{m}$ ein treuer $\mathfrak{R}$-Modul und damit in (1) die Zahl s gleich dem Exponenten e des Radikals $\mathfrak{W}$ ist, daß $V(\mathfrak{m})$ dann und nur dann distributiv ist; wenn die verbandstheoretische Länge $l(V)$ des Verbandes $V(\mathfrak{m})$ und der Exponent e des Radikales $\mathfrak{W}$ übereinstimmen.

Falls $\mathfrak{R}$ nicht primär ist, ist der halbeinfache Faktorring $\overline{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$ im ringtheoretischen Sinne direkte Summe von etwa q einfachen Ringen

$$\overline{\mathfrak{R}}=\overline{\mathfrak{R}}_1\oplus\cdots\oplus\overline{\mathfrak{R}}_q. \tag{2}$$

Für $\mathfrak{R}$ selbst bedeutet dies, daß das Einselement von $\mathfrak{R}$ sich als Summe von q zueinander orthogonalen Idempotenten ε_i,

$$1=\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_q, \qquad \varepsilon_i\cdot\varepsilon_k=\delta_{ik}\varepsilon_i, \tag{3}$$

und die additive Gruppe des Ringes $\mathfrak{R}$ sich durch

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1+\cdots+\mathfrak{R}_q+\mathfrak{N} \tag{4}$$

darstellen läßt, wobei die $\mathfrak{R}_i=\varepsilon_i\mathfrak{R}\varepsilon_i$ primäre Ringe und $\mathfrak{N}$ eine additive Gruppe aus dem Radikal $\mathfrak{W}$ ist. Bei dem natürlichen Ringhomomorphismus von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$ geht (4) in (2) über.

Für jedes i zwischen 1 und q ist $\varepsilon_i\mathfrak{m}$ ein $\mathfrak{R}_i$-Modul. In BEHRENS [2], Sätze 2 und 4, wurde auseinandergesetzt, daß der Verband $V(\mathfrak{m})$ der $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$ dann und nur dann distributiv ist, wenn die Verbände $V_i(\varepsilon_i\mathfrak{m})$ der $\mathfrak{R}_i$-Untermoduln von $\varepsilon_i\mathfrak{m}$ für $i=1,\ldots,q$ distributiv sind. Setzt man also voraus, daß $\mathfrak{m}$ ein treuer $\mathfrak{R}$-Modul ist und damit auch die $\varepsilon_i\mathfrak{m}$ treue $\mathfrak{R}_i$-Moduln sind, so ist $V(\mathfrak{m})$ dann und nur dann distributiv, wenn die Exponenten e_i der Radikale $\mathfrak{W}_i$ der Ringe $\mathfrak{R}_i$ der Reihe nach gleich den verbandstheoretischen Längen $l(V_i)$ der $\mathfrak{R}_i$-Moduln $\varepsilon_i\mathfrak{m}$ sind, oder noch einfacher, wie jetzt bewiesen werden soll, wenn

$$l\big(V(\mathfrak{m})\big)=e_1+\cdots+e_q \tag{5}$$

gilt (vgl. BEHRENS [3]). Sei

$$\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_0>\mathfrak{m}_1>\cdots>\mathfrak{m}_l=0 \tag{6}$$

eine maximale Kette von $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$. Als irreduzibler $\mathfrak{R}$-Modul stellt $\overline{\mathfrak{m}}_k=\mathfrak{m}_k-\mathfrak{m}_{k+1}$ genau einen Summanden $\overline{\mathfrak{R}}_i$ aus (2) treu dar und annulliert die übrigen. Diejenigen Faktoren in (6), die $\overline{\mathfrak{R}}_i$ treu darstellen, seien zu einer Klasse $\mathfrak{K}^{(i)}$ zusammengefaßt. Sei nun k eine Zahl zwischen 0 und $l-1$. Wenn $\overline{\mathfrak{m}}_k\notin\mathfrak{K}^{(i)}$, dann wird $\overline{\mathfrak{m}}_k$ von $\overline{\varepsilon}_i$ annulliert; dies zieht $\varepsilon_i\mathfrak{m}_k\subseteqq\mathfrak{m}_{k+1}$, also $\varepsilon_i\mathfrak{m}_k=\varepsilon_i\mathfrak{m}_{k+1}$ nach sich. Wenn jedoch $\overline{\mathfrak{m}}_k\in\mathfrak{K}^{(i)}$, dann ist $\varepsilon_i\mathfrak{m}_{k+1}$ als $\mathfrak{R}_i$-Modul nicht nur Untermodul von $\varepsilon_i\mathfrak{m}_k$, sondern sogar unterer Nachbar. Dazu ist zu zeigen, daß für einen $\mathfrak{R}_i$-Modul $\mathfrak{q}$ die Beziehung $\varepsilon_i\mathfrak{m}_{k+1}\subseteqq\mathfrak{q}\subseteqq\varepsilon_i\mathfrak{m}_k$ nur dann richtig sein kann, wenn in ihr links oder rechts das Gleichheitszeichen steht. Aus dem $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{q}'=\mathfrak{R}\mathfrak{q}$ läßt sich durch $\varepsilon_i\mathfrak{q}'=\varepsilon_i\mathfrak{R}\mathfrak{q}=\varepsilon_i\mathfrak{R}\varepsilon_i\mathfrak{q}=\mathfrak{q}$ der Modul $\mathfrak{q}$ zurückgewinnen. Setze $\mathfrak{q}''=\mathfrak{q}'\cup\mathfrak{m}_{k+1}$. Auch für $\mathfrak{q}''$ gilt $\varepsilon_i\mathfrak{q}''=\varepsilon_i\mathfrak{q}'\cup\varepsilon_i\mathfrak{m}_{k+1}=\mathfrak{q}\cup\varepsilon_i\mathfrak{m}_{k+1}=\mathfrak{q}$. Andererseits ist aber $\mathfrak{q}''$ ein $\mathfrak{R}$-Modul, der $\mathfrak{m}_{k+1}$

enthält und in $\mathfrak{R}\varepsilon_i\mathfrak{m}_k \cup \mathfrak{m}_{k+1}$, also in $\mathfrak{m}_k$ enthalten ist. Da die Kette (6) maximal ist, folgt hieraus $\mathfrak{q}'' = \mathfrak{m}_k$ oder $\mathfrak{q}'' = \mathfrak{m}_{k+1}$, also ist $\mathfrak{q} = \varepsilon_i\mathfrak{q}''$ einer der beiden Moduln $\varepsilon_i\mathfrak{m}_k$ oder $\varepsilon_i\mathfrak{m}_{k+1}$. — Diese Diskussion zeigt, daß

$$\varepsilon_i\mathfrak{m} \supseteq \varepsilon_i\mathfrak{m}_1 \supseteq \varepsilon_i\mathfrak{m}_2 \supseteq \cdots \supseteq \varepsilon_i\mathfrak{m}_l = 0 \tag{7}$$

bis auf Wiederholungen eine maximale Kette von $\mathfrak{R}_i$-Moduln ist, deren verbandstheoretische Länge $l\big(V_i(\varepsilon_i\mathfrak{m})\big)$ mit der Anzahl der in der Klasse $\mathfrak{R}^{(i)}$ enthaltenen Faktormoduln $\mathfrak{m}_k - \mathfrak{m}_{k+1}$ übereinstimmt. Da jeder Faktormodul aus (6) in genau einer Klasse liegt, gilt

$$l\big(V(\mathfrak{m})\big) = \sum_i l\big(V_i(\varepsilon,\mathfrak{m})\big), \qquad l \leqq i \leqq q. \tag{8}$$

$\varepsilon_i\mathfrak{m}$ ist ein treuer $\mathfrak{R}_i$-Modul, wenn $\mathfrak{m}$ ein treuer $\mathfrak{R}$-Modul ist. Dies impliziert $\mathfrak{W}_i^{e_i-1}\varepsilon_i\mathfrak{m} \neq 0$. Also ist die Länge $l\big(V_i(\varepsilon_i\mathfrak{m})\big)$ des Verbandes der $\mathfrak{R}_i$-Untermoduln von $\varepsilon_i\mathfrak{m}$ mindestens e_i. Hieraus folgt nach (8) für jeden treuen $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{m}$ die Ungleichung

$$l\big(V(\mathfrak{m})\big) \geqq e_1 + \cdots + e_q. \tag{9}$$

Nach dem vorletzten Absatz ist die Distributivität von $V(\mathfrak{m})$ mit $l\big(V_i(\varepsilon_i\mathfrak{m})\big) = e_i$ für $i = 1, \ldots, q$ äquivalent und daher auch mit der Gl. (5). Wegen $e_i \geqq 1$ für alle i, tritt jede der q Klassen $\mathfrak{R}^{(i)}$ in (6) auf. Dies läßt sich zusammenfassen zu dem folgenden

SATZ 1. *Mittels der orthogonalen Idempotente $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$; $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_q = 1$, sei die additive Gruppe des Ringes $\mathfrak{R}$ durch*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_q + \mathfrak{N} \tag{4}$$

dargestellt, wobei die $\mathfrak{R}_i$ primäre Ringe und $\mathfrak{N}$ eine additive Gruppe aus dem Radikal $\mathfrak{W}$ des Ringes $\mathfrak{R}$ ist. e_i sei der Exponent des Radikales $\mathfrak{W}_i$ des Ringes $\mathfrak{R}_i$, $i = 1, \ldots, q$. Sei $\mathfrak{m}$ ein $\mathfrak{R}$-Modul und $V(\mathfrak{m})$ der Verband der $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$.

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 > \mathfrak{m}_1 > \cdots > \mathfrak{m}_l = 0 \tag{9}$$

sei eine maximale Kette von $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$, also $l = l(V)$ die verbandstheoretische Länge von $V(\mathfrak{m})$. Dann gelten folgende Behauptungen:

1. *Wenn $\mathfrak{m}$ treu ist, gilt*

$$l(V) \geqq e_1 + \cdots + e_q. \tag{10}$$

2. *$V(\mathfrak{m})$ ist dann und nur dann distributiv, wenn*

$$l(V) = e_1 + \cdots + e_q \tag{11}$$

erfüllt ist.

3. *Sei $\overline{\mathfrak{R}}_i$ der einfache Ring $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{W}_i$. Diejenigen Faktormoduln $\mathfrak{m}_k - \mathfrak{m}_{k+1}$ in (9), die $\overline{\mathfrak{R}}_i$ treu darstellen, seien zu einer Klasse $\mathfrak{K}^{(i)}$ zusammengefaßt. Dann ist $\varepsilon_i\mathfrak{m} \supseteq \varepsilon_i\mathfrak{m}_1 \supseteq \cdots \supseteq \varepsilon_i\mathfrak{m}_l = 0$ bis auf Wiederholungen eine maximale Kette von $\mathfrak{R}_i$-Moduln. Falls $\mathfrak{m}$ treu und $V(\mathfrak{m})$ distributiv ist, ist die Länge dieser Kette, also die Anzahl der Elemente in der Klasse $\mathfrak{K}^{(i)}$ gleich e_i und die Anzahl der Klassen gleich q.*

§ 2

JACOBSON [4], Kap. I, § 2, nennt einen Ring $\mathfrak{R}$ primitiv, wenn er einen treuen, irreduziblen $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{m}$ besitzt. Für einen Ring mit Einselement, der die Minimalbedingung für Linksideale erfüllt, bedeuten Primitivität und Einfachheit dasselbe, und alle treuen, irreduziblen $\mathfrak{R}$-Moduln sind untereinander und zu den minimalen Linksidealen von $\mathfrak{R}$ isomorph. Diese Linksideale wiederum sind zu denjenigen Faktormoduln $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ isomorph, deren $\mathfrak{l}$ ein beliebiges maximales Linksideal aus $\mathfrak{R}$ ist. Natürlich ist in diesem Fall der Verband V der $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ distributiv, da er ja nur aus 0 und $\mathfrak{R}$ modulo $\mathfrak{l}$ besteht.

DEFINITION 1. *$\mathfrak{R}$ sei ein Ring mit Einselement, der die Minimalbedingung für Linksideale erfüllt. $\mathfrak{R}$ heiße distributiv darstellbar, wenn ein treuer und unitaler $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{m}$ mit distributivem $\mathfrak{R}$-Untermodulverband $V(\mathfrak{m})$ existiert. $\mathfrak{m}$ sei dann als ein $\mathfrak{R}$ distributiv darstellender Modul oder kürzer als distributiver $\mathfrak{R}$-Modul bezeichnet.*

Natürlich ist der Untermodulverband des Nullmoduls distributiv, dieser Modul ist aber nicht treu. Daß nicht jeder Ring distributiv darstellbar ist, zeigt das

BEISPIEL 1. K sei ein kommutativer Körper, und die C_{ik} seien die Matrixeinheiten. Der Ring $\mathfrak{R}=\mathfrak{1}K+C_{13}K+C_{23}K$ hat $\mathfrak{W}=C_{13}K+C_{23}K$ als Radikal. Dieses hat als Dimension $\dim_K \mathfrak{W}=2$ und als Exponenten e ebenfalls 2. Ein $\mathfrak{R}$ distributiv darstellender Modul $\mathfrak{m}$ hätte nach Satz 1 die verbandstheoretische Länge $l(V(\mathfrak{m}))=2$. Dies ist aber unmöglich, denn nach ARTIN [1], Satz 9.5 A, ist $\dim_K \mathfrak{m}=l(V(\mathfrak{m}))$, also gleich 2; da $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{m}$ treu dargestellt wird, müßte daher $\dim_K \mathfrak{W}\leqq\mathfrak{1}$ sein, q.e.a.

SATZ 2. *Ein $\mathfrak{R}$ distributiv darstellender Modul $\mathfrak{m}$ ist zyklisch.*

BEWEIS. 1. Sei $\mathfrak{R}$ primär und e der Exponent des Radikales $\mathfrak{W}$. Da $\mathfrak{m}$ treu, ist $\mathfrak{W}^{e-1}\mathfrak{m}\neq 0$. Also existiert ein $b\in\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{W}^{e-1}b\neq 0$. Wegen $\mathfrak{W}^e=0$ liegt $\mathfrak{W}^k b$ nicht in $\mathfrak{W}^{k+1}\mathfrak{m}$ für $k<e$. Andererseits ist $\mathfrak{W}^k b\leqq\mathfrak{W}^k\mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{W}^k\mathfrak{m}-\mathfrak{W}^{k+1}\mathfrak{m}$ wegen der Distributivität von $V(\mathfrak{m})$ irreduzibel ist, folgt für den $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{W}^k b$ die Beziehung $\mathfrak{W}^k b\cup\mathfrak{W}^{k+1}\mathfrak{m}=\mathfrak{W}^k\mathfrak{m}$. Aus der Induktionsannahme $\mathfrak{m}=\mathfrak{R}b\cup\mathfrak{W}^k\mathfrak{m}$ folgt also $\mathfrak{m}=\mathfrak{R}b\cup\mathfrak{W}^{k+1}\mathfrak{m}$ und daraus, wegen $\mathfrak{W}^e\mathfrak{m}=0$, die Gleichung $\mathfrak{m}=\mathfrak{R}b$. — 2. Sei $\mathfrak{R}$ nicht primär. Mit den Bezeichnungen von Satz 1 ist $\mathfrak{m}=\mathfrak{1}\mathfrak{m}=\varepsilon_1\mathfrak{m}+\cdots+\varepsilon_q\mathfrak{m}$ und $\varepsilon_i\mathfrak{m}$ ein $\mathfrak{R}_i$ distributiv darstellender Modul. Wie eben bewiesen, existiert ein b_i in $\varepsilon_i\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{R}_i b_i=\varepsilon_i\mathfrak{m}$. Setze $b=b_1+\cdots+b_q$. Dann gilt: $\varepsilon_i\mathfrak{m}=\mathfrak{R}_i b_i\leqq\mathfrak{R}b_i=\mathfrak{R}\varepsilon_i b\leqq\mathfrak{R}b$, also $\mathfrak{m}=\mathfrak{R}b$.

KOROLLAR ZU SATZ 2. *$\mathfrak{m}=\mathfrak{R}b$ sei ein $\mathfrak{R}$ distributiv darstellender Modul und*

$$\mathfrak{l}=\{\lambda;\ \lambda\in\mathfrak{R},\ \lambda b=0\}. \tag{1}$$

Dann sind die $\mathfrak{R}$-Moduln $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ zueinander isomorph.

Eine Übersicht über alle distributiven Moduln eines distributiv darstellbaren Ringes $\mathfrak{R}$ erhält man demnach dadurch, daß man diejenigen Linksideale $\mathfrak{l}$ charakterisiert, die zu distributiven Moduln $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ führen. Hierbei ist zu beachten, daß, im Gegensatz zu der speziellen Situation bei den ein-

fachen Ringen, im allgemeinen zwei den Ring $\mathfrak{R}$ distributiv darstellende Moduln nicht zu einander isomorph sind, wie das Beispiel 3 in § 3 zeigen wird.

Die Charakterisierung der obigen Linksideale sei zunächst für primäre Ringe $\mathfrak{R}$ vorgenommen. Der Faktorring $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$ eines derartigen Ringes ist ringisomorph zu dem vollen Matrizenring K_d über einem Körper K. Da der genauere Zusammenhang von $\mathfrak{R}$ und K mit den distributiven Moduln $\mathfrak{m}$ benötigt wird, sei im folgenden aus JACOBSON [1] das Theorem 1 aus Kap. II, § 2, in einer etwas schwächeren, jedoch für die Zwecke der vorliegenden Abhandlung genügenden Form zitiert als

SATZ VON JACOBSON. *K sei ein Körper und $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ Rechtsvektorräume über K. $\mathfrak{R}$ sei ein Ring K-linearer Abbildungen sowohl von $\mathfrak{m}$ als auch von $\mathfrak{m}'$ in sich und $\mathfrak{B}$ eine additive Gruppe K-linearer Abbildungen von $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{m}'$ mit $\mathfrak{R}\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{B}$. Die beiden $\mathfrak{R}$-Moduln $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ seien irreduzibel und K ihr Zentralisator. Dann existiert zu vorgegebenen, über K linear unabhängigen Elementen $m_1, \ldots, m_d$ aus $\mathfrak{m}$ und beliebigen Elementen $m_1', \ldots, m_d'$ aus $\mathfrak{m}'$ ein Element ϱ in $\mathfrak{R}$ mit $\varrho m_j = m_j'$ für $j = 1, \ldots, d$; mit anderen Worten, die Gruppe $\mathfrak{B}$ ist dicht.*

Um diesen Satz anwenden zu können, sei der Begriff der distributiven und K-linearen Darstellbarkeit eines primären Ringes eingeführt:

DEFINITION 2. *Der Faktorring $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}(\mathfrak{R})$ sei ringisomorph zu K_d, K ein Körper. $\mathfrak{R}$ ist distributiv und K-linear darstellbar, wenn ein $\mathfrak{R}$-Links-, K-Rechts-Modul $\mathfrak{m}$ existiert, dessen $\mathfrak{R}$-K-Untermodulverband $V(\mathfrak{m})$ distributiv ist. $\mathfrak{m}$ werde dann wieder als distributiver Modul bezeichnet.*

Wenn $\mathfrak{m}$ den Ring $\mathfrak{R}$ im Sinne der Definition 1 distributiv darstellt, besteht nach § 1 der Verband der $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$ aus den Moduln $\mathfrak{W}^k\mathfrak{m}$. Wenn überdies $\mathfrak{m}$ noch K-Rechtsmodul ist, sind es auch alle $\mathfrak{W}^k\mathfrak{m}$.

Der primäre Ring $\mathfrak{R}$ sei nun durch $\mathfrak{m}$ distributiv und K-linear dargestellt, also gilt $(\varrho m)k = \varrho(mk)$ für alle $\varrho \in \mathfrak{R}$, $m \in \mathfrak{m}$, $k \in K$. Der Exponent des Radikales $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{R}$ sei e. Das (zweiseitige) Ideal $\mathfrak{J}$ aus $\mathfrak{R}$ sei ungleich Null. Dann existieren zwei nichtnegative, ganzrationale Zahlen p und q mit der Eigenschaft

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathfrak{W}^p\mathfrak{J} \neq 0, & \mathfrak{W}^{p+1}\mathfrak{J} = 0, \\ \mathfrak{W}^p\mathfrak{J}\mathfrak{W}^q \neq 0, & \mathfrak{W}^p\mathfrak{J}\mathfrak{W}^{q+1} = 0. \end{cases}$$

Da $\mathfrak{R}$ primär und $\mathfrak{m}$ distributiver $\mathfrak{R}$-Modul, ist $0 \neq \mathfrak{W}^p\mathfrak{J}\mathfrak{W}^q\mathfrak{m} = \mathfrak{W}^k\mathfrak{m}$, denn $\mathfrak{W}^p\mathfrak{J}\mathfrak{W}^q\mathfrak{m}$ ist als $\mathfrak{R}$-Untermodul einer der Moduln der Kette der $\mathfrak{W}^i\mathfrak{m}$. Weil $0 = \mathfrak{W}^{p+1}\mathfrak{J}\mathfrak{W}^q\mathfrak{m} = \mathfrak{W}^{k+1}\mathfrak{m}$, ist $k = e - 1$. Da schließlich $\mathfrak{W}^p\mathfrak{J}\mathfrak{W}^{q+1} = 0$, ist $\mathfrak{W}^p\mathfrak{J}\mathfrak{W}^q \cdot \mathfrak{W}\mathfrak{m} = 0$. Daraus folgt, daß $\mathfrak{W}^p\mathfrak{J}\mathfrak{W}^q$ ein von Null verschiedenes Ideal ist, dessen Elemente den irreduziblen $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{m} - \mathfrak{W}\mathfrak{m}$ K-linear abbilden in den irreduziblen $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{W}^{e-1}\mathfrak{m}$. Nach dem Satz von JACOBSON ist daher $\mathfrak{W}^p\mathfrak{J}\mathfrak{W}^q$ die dichte additive Gruppe K-linearer Abbildungen von $\mathfrak{m} - \mathfrak{W}\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{W}^{e-1}\mathfrak{m}$. Da diese Gruppe von Abbildungen mit denen des Ideales $\mathfrak{W}^{e-1}$ übereinstimmt, gilt

$$(3) \qquad \mathfrak{W}^p\mathfrak{J}\mathfrak{W}^q = \mathfrak{W}^{e-1}.$$

Somit enthält jedes von Null verschiedene Ideal das $\mathfrak{W}^{e-1}$. — Sei nun η ein von Null verschiedenes Idempotent aus $\mathfrak{R}$. Da η nicht in $\mathfrak{W}$ liegt und

$\mathfrak{m} - \mathfrak{W}\mathfrak{m}$ den Faktorring $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$ treu darstellt, ist $\eta\mathfrak{m}$ nicht in $\mathfrak{W}\mathfrak{m}$ enthalten. Da weiter $\mathfrak{W}^{\varepsilon-1}$ die dichte Gruppe K-linearer Abbildungen von $\mathfrak{m} - \mathfrak{W}\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{W}^{\varepsilon-1}\mathfrak{m}$ und damit insbesondere transitiv ist, gilt

$$\mathfrak{W}^{\varepsilon-1} \cdot \eta \neq 0 \quad \text{für} \quad 0 \neq \eta = \eta^2 \in \mathfrak{R}. \tag{4}$$

(3) und (4) seien notiert als

Satz 3. *Jedes Ideal $\mathfrak{J} \neq 0$ eines distributiv und K-linear darstellbaren primären Ringes $\mathfrak{R}$ enthält $\mathfrak{W}^{\varepsilon-1}$, wobei $\mathfrak{R}/\mathfrak{W} \cong K_q$ und e der Exponent des Radikales $\mathfrak{W}$ ist. Ein derartiger Ring ist also subdirekt irreduzibel. Für zwei geeignete Zahlen p und q gilt $\mathfrak{W}^p \mathfrak{J} \mathfrak{W}^q = \mathfrak{W}^{\varepsilon-1}$. Für $0 \neq \eta = \eta^2 \in \mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{W}^{\varepsilon-1} \cdot \eta \neq 0$.*

Der primäre Ring $\mathfrak{R}$ sei nun durch den $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{m}$ distributiv und K-linear dargestellt. Nach Satz 2 existiert ein erzeugendes Element b von $\mathfrak{m}$, d.h. $\mathfrak{m} = \mathfrak{R}b$. Das Linksideal $\mathfrak{l} = (0:b) = \{\lambda;\ \lambda \in \mathfrak{R},\ \lambda b = 0\}$ führt zu dem zu $\mathfrak{m}$ isomorphen $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$. In $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{W}$ ist $\overline{\mathfrak{l}} = \mathfrak{l} \bmod \mathfrak{W}$ ein Linksideal $\overline{\mathfrak{l}} = \overline{\mathfrak{R}} \cdot \overline{\varepsilon}$, wobei man nach Artin [*I*], Satz 2.6B, das Idempotent ε aus $\mathfrak{l}$ nehmen kann. Bei vollständig primärem $\mathfrak{R}$ ist $\varepsilon = \overline{0}$, und stets ist das Linksideal $\overline{\mathfrak{l}}$ maximal in $\overline{\mathfrak{R}}$. Wäre dies nämlich nicht richtig, so existierte ein Linksideal $\mathfrak{l}'$ mit $\mathfrak{l} \cup \mathfrak{W} \subset \mathfrak{l}' \subset \mathfrak{R}$ und da $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ ein distributiver Modul des primären Ringes $\mathfrak{R}$ ist, wäre $\mathfrak{l}' - \mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{W}\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$, also $\mathfrak{l}' \subseteq \mathfrak{W} \cup \mathfrak{l}$, also $\overline{\mathfrak{l}'} = \overline{\mathfrak{l}}$, q.e.a. Da $\overline{\mathfrak{l}} = \overline{\mathfrak{R}} \cdot \overline{\varepsilon}$ maximal ist, ist $\eta = 1 - \varepsilon$ ein von 0 verschiedenes Idempotent und $\overline{\mathfrak{R}} \cdot \overline{\eta}$ ein minimales Linksideal in $\overline{\mathfrak{R}}$, bzw. bei vollständig primären $\mathfrak{R}$ gleich ganz $\overline{\mathfrak{R}}$. Wenn $\overline{\mathfrak{R}} \cdot \overline{\eta}$ minimales Linksideal in $\overline{\mathfrak{R}}$ ist, dann ist $\overline{\eta} \cdot \overline{\mathfrak{R}}$ minimales Rechtsideal, also $\overline{\varepsilon} \cdot \overline{\mathfrak{R}}$ maximales Rechtsideal in $\overline{\mathfrak{R}}$, also $\mathfrak{r} = \varepsilon\mathfrak{R} \cup \mathfrak{W}$ ein maximales Rechtsideal in $\mathfrak{R}$; dies ist auch für $\varepsilon = 0$, also $\mathfrak{R}/\mathfrak{W} \cong K$, noch richtig. — Das $\mathfrak{l}$ ist im allgemeinen kein unter allen Linksidealen maximales Linksideal in $\mathfrak{R}$, sondern es ist maximal nur unter denjenigen Linksidealen, die das Linksideal

$$(0:\mathfrak{r}) = \{\varrho;\ \varrho \in \mathfrak{R},\ \varrho\,\mathfrak{r} = 0\} \tag{5}$$

nur trivial treffen, d.h. $\mathfrak{l}$ ist maximal bezüglich der Forderung

$$\mathfrak{l} \cap (0:\mathfrak{r}) = 0. \tag{6}$$

Zunächst soll (6) und dann die Maximalität bewiesen werden.

Für $m \in \mathfrak{m}$ sei $\overline{m} = m$ modulo $\mathfrak{W}\mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{l} = (0:b)$ und $\varepsilon \in \mathfrak{l}$, ist $\varepsilon \cdot b = 0$, also $b = (\varepsilon + \eta)b = \eta b \in \eta\mathfrak{m}$ und damit auch $\eta b K \subseteq \eta\mathfrak{m}$, also $\overline{\eta}\,\overline{b} K \subseteq \overline{\eta}\,\overline{\mathfrak{m}}$. Hierin gilt sogar das Gleichheitszeichen. Wäre nämlich die K-Dimension von $\overline{\eta}\,\overline{\mathfrak{m}}$ größer als 1, dann existierte nach dem Satz von Jacobson neben $\overline{b}$ ein $\overline{b'} \in \overline{\mathfrak{m}}$ und ein $\overline{\tau} \in \overline{\mathfrak{R}}$ so, daß $\overline{\tau}\,\overline{\eta}\,\overline{b'} \neq \overline{0}$, $\overline{\tau}\,\overline{\eta}\,\overline{b} = \overline{0}$ wäre. Dann wäre aber die Menge $\{\overline{\tau} \cdot \overline{\eta};\ \overline{\tau}\,\overline{\eta}\,\overline{b} = \overline{0}\}$ ein von $\overline{0}$ verschiedenes echtes Linksunterideal des minimalen Linksideales $\overline{\mathfrak{R}} \cdot \overline{\eta}$, q.e.a. $\overline{\eta}\,\overline{\mathfrak{m}} = \overline{\eta}\,\overline{b} K$ zieht $\eta\mathfrak{m} \subseteq \eta b K \cup \mathfrak{W}\mathfrak{m}$ nach sich. Da

$$\mathfrak{m} = 1\,\mathfrak{m} = \varepsilon\,\mathfrak{m} + \eta\,\mathfrak{m} = \varepsilon\,\mathfrak{m} \cup \eta\,b\,K \cup \mathfrak{W}\,\mathfrak{m} \tag{7}$$

und $\eta b = b$ ist, annulliert jedes λ, das sowohl in $\mathfrak{l}$ als auch in $(0:\mathfrak{r}) = (0:(\varepsilon\mathfrak{R} \cup \mathfrak{W}))$ liegt wegen

$$\lambda\,\mathfrak{m} = \lambda\,\varepsilon\,\mathfrak{m} \cup \lambda\,b\,K \cup \lambda\,\mathfrak{W}\,\mathfrak{m} = 0 \tag{8}$$

den Modul $\mathfrak{m}$. Da dieser treu ist, muß $\lambda=0$ sein und daher (6) gelten. — Die Maximalität von $\mathfrak{l}$ bezüglich der Eigenschaft (6) folgt so: Angenommen, es existierte ein Linksideal $\mathfrak{l}'$ mit $\mathfrak{l}\subset\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}'\cap(0:\mathfrak{r})=0$. Dann wäre $\mathfrak{l}'-\mathfrak{l}$ ein $\mathfrak{R}$-Untermodul von $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$. Da $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ zu $\mathfrak{m}$ isomorph ist, müßte $\mathfrak{l}'-\mathfrak{l}$ einer der Moduln aus dem distributiven Verband der $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ sein. Da $\mathfrak{R}$ primär ist, besteht nach § 1 dieser Verband ausschließlich aus den Moduln $\mathfrak{W}^k(\mathfrak{R}-\mathfrak{l})=\mathfrak{W}^k$ modulo $\mathfrak{l}$. Also wäre, für eine geeignete Zahl $k\leqq e-1$, $\mathfrak{l}'-\mathfrak{l}=\mathfrak{W}^k-\mathfrak{l}$. Weil $\mathfrak{l}\subset\mathfrak{l}'$, würde $\mathfrak{l}'=\mathfrak{W}^k\cup\mathfrak{l}$ und damit die Beziehung $\mathfrak{l}'\supseteqq\mathfrak{W}^{e-1-k}\,\mathfrak{l}'=\mathfrak{W}^{e-1}\cup\mathfrak{W}^{e-1-k}\cdot\mathfrak{l}$, also $\mathfrak{W}^{e-1}\leqq\mathfrak{l}'$ folgen. Mit ε läge auch $\mathfrak{W}^{e-1}\cdot\varepsilon$ in $\mathfrak{l}\subset\mathfrak{l}'$. Da $1=\varepsilon+\eta$, wäre $\mathfrak{W}^{e-1}\cdot\eta\leqq\mathfrak{l}'$. Nun ist wegen $\eta\neq 0$ nach Satz 3 einerseits $\mathfrak{W}^{e-1}\cdot\eta\neq 0$ und andererseits $\mathfrak{W}^{e-1}\eta\cdot\mathfrak{r}=\mathfrak{W}^{e-1}\eta(\varepsilon\mathfrak{R}\cup\mathfrak{W})=0$, also wäre $\mathfrak{l}'\cap(0:\mathfrak{r})\neq 0$ q.e.a.

SATZ 4. *Der $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ stelle den primären Ring $\mathfrak{R}$ distributiv und K-linear dar. Dann ist das Linksideal $\mathfrak{l}$ bezüglich der Bedingung $\mathfrak{l}\cap(0:\mathfrak{r})=0$ maximal. Dabei ist $\mathfrak{r}=\varepsilon\mathfrak{R}\cup\mathfrak{W}$ ein maximales Rechtsideal in $\mathfrak{R}$, dessen Idempotent ε in $\overline{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$ die Gleichung $\overline{1}=\overline{\mathfrak{R}}\cdot\overline{\varepsilon}$ impliziert.*

Beim Versuch, hiervon die Umkehrung zu beweisen, setzt man wegen des Satzes 3 natürlich voraus, daß in dem primären Ring $\mathfrak{R}$ jedes von Null verschiedene (zweiseitige) Ideal das $\mathfrak{W}^{e-1}$ enthält und für jedes $0\neq\eta=\eta^2\in\mathfrak{R}$ das Produkt $\mathfrak{W}^{e-1}\cdot\eta\neq 0$ ist. Wenn $\mathfrak{r}$ ein maximales Rechtsideal und $\mathfrak{l}$ irgendein $(0:\mathfrak{r})$ nur trivial treffendes Linksideal ist, d.h. $\mathfrak{l}\cap(0:\mathfrak{r})=0$, dann ist $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ ein treuer $\mathfrak{R}$-Modul. Beweis: In $\overline{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$ sei $\overline{\mathfrak{r}}=\overline{\varepsilon}\,\overline{\mathfrak{R}}$, wobei $\varepsilon=\varepsilon^2\in\mathfrak{r}$. Dann ist $\eta=1-\varepsilon$ ein von Null verschiedenes Idempotent, also $\mathfrak{W}^{e-1}\cdot\eta\neq 0$. Das Ideal $\mathfrak{J}=\{\varrho;\,\varrho\in\mathfrak{R},\,\varrho\,\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{l}\}$ ist gleich Null, denn sonst würde es $\mathfrak{W}^{e-1}\cdot\eta$ enthalten, andererseits liegt aber $\mathfrak{J}\leqq\mathfrak{l}$, weil $1\in\mathfrak{R}$, also wäre $0\neq\mathfrak{W}^{e-1}\cdot\eta\leqq\mathfrak{l}\cap(0:\mathfrak{r})$, q.e.a..

Daß der Modul $\mathfrak{m}$ dem primären Ring $\mathfrak{R}$ K-linear darstellt, bedeutet, daß die Elemente von $\mathfrak{R}$ K-lineare Abbildungen von $\mathfrak{m}$ in sich induzieren, d.h. daß K im Zentralisator von $\mathfrak{m}$ liegt. Wenn $\mathfrak{m}=\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ ist, läßt sich der Zentralisator des $\mathfrak{R}$-Moduls $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ folgendermaßen berechnen (s. auch JACOBSON [1], Kap. II, § 1, Satz 1): Ein $\mathfrak{R}$-Homomorphismus B von $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ in sich bildet $\tilde{1}=1 \bmod \mathfrak{l}$ ab auf $B(\tilde{1})=\beta \bmod \mathfrak{l}$, wobei $\beta\in\mathfrak{R}$. Dann ist für $\varrho\in\mathfrak{R}$ das Bild $B(\tilde{\varrho})=\varrho\,B(\tilde{1})=\varrho\beta \bmod \mathfrak{l}$. Diese Zuordnung ist genau dann eindeutig, wenn aus $\varrho_1\equiv\varrho_2 \pmod{\mathfrak{l}}$ folgt $B(\tilde{\varrho}_1)=B(\tilde{\varrho}_2)$, also $(\varrho_1-\varrho_2)\beta\in\mathfrak{l}$. Das heißt alle und nur diejenigen $\beta\in\mathfrak{R}$, die $\mathfrak{l}\,\beta\leqq\mathfrak{l}$ erfüllen, induzieren $\mathfrak{R}$-Endomorphismen von $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$. Daraus folgt: Der Zentralisator des $\mathfrak{R}$-Moduls $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ ist der Faktorring von $\mathfrak{B}=\{\beta;\,\beta\in\mathfrak{R},\,\mathfrak{l}\beta\leqq\mathfrak{l}\}$ nach dem $\mathfrak{B}$-Ideal derjenigen Elemente β aus $\mathfrak{B}$, für die $\mathfrak{R}\beta\leqq\mathfrak{l}$ gilt. Wegen $1\in\mathfrak{R}$ ist diese Menge gerade $\mathfrak{l}$.

HILFSSATZ 1. *Der Zentralisator des $\mathfrak{R}$-Moduls $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ ist ringisomorph zu*

$$\mathfrak{C}=\mathfrak{B}/\mathfrak{B}\cap\mathfrak{l}=\{\beta \bmod \mathfrak{l};\,\beta\in\mathfrak{R},\,\mathfrak{l}\beta\leqq\mathfrak{l}\}. \tag{9}$$

Nun sei vorausgesetzt, daß der primäre Ring $\mathfrak{R}$ ein cleft-ring ist, d.h. daß die additive abelsche Gruppe von $\mathfrak{R}$ sich in die direkte Summe

$$\mathfrak{R}=K_d+\mathfrak{W} \tag{10}$$

aufspalten läßt. Die Elemente $\varkappa$ aus K induzieren durch Rechtsmultiplikation mit $\varkappa$ nach Hilfssatz 1 dann und nur dann $\mathfrak{R}$-Endomorphismen von $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$, wenn $\mathfrak{l}\varkappa\subseteqq\mathfrak{l}$, also $\mathfrak{l}K\subseteqq\mathfrak{l}$ richtig ist. Andererseits gehören zu verschiedenen Elementen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ aus K natürlich verschiedene Endomorphismen von $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$, da aus $\varkappa\in\mathfrak{l}$ folgen würde $1=\varkappa^{-1}\cdot\varkappa\in\mathfrak{l}$, also $\mathfrak{l}=\mathfrak{R}$.

Satz 5. *Voraussetzung. In dem primären Ring* $\mathfrak{R}=K_d+\mathfrak{W}$ *sei* e *der Exponent des Radikales* $\mathfrak{W}$. *Jedes von Null verschiedene Ideal in* $\mathfrak{R}$ *enthalte* $\mathfrak{W}^{e-1}$ *und für jedes Idempotent* $\eta\neq 0$ *aus* R *sei* $\mathfrak{W}^{e-1}\cdot\eta\neq 0$. *Sei* $\mathfrak{r}$ *ein maximales Rechtsideal aus* $\mathfrak{R}$ *und* $\mathfrak{l}$ *ein Linksideal, das bezüglich* $\mathfrak{l}\cap(0:\mathfrak{r})=0$ *maximal ist. Sei* $\mathfrak{l}K\subseteqq\mathfrak{l}$.

Behauptung. Der $\mathfrak{R}$*-Modul* $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ *stellt* $\mathfrak{R}$ *treu durch einen Ring* K*-linearer Abbildungen dar.* $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ *stellt dabei* $\mathfrak{R}$ *genau dann distributiv dar, wenn die verbandstheoretische Länge* $l\big(V(\mathfrak{R}-\mathfrak{l})\big)=e$ *ist oder, anders ausgedrückt, wenn für* $k=0,1,\ldots,e-1$ *die Faktormoduln* $(\mathfrak{W}^k\cup\mathfrak{l})-(\mathfrak{W}^{k+1}\cup\mathfrak{l})$ *irreduzible* $\mathfrak{R}$*-Moduln sind.*

Die noch zu beweisende letzte Behauptung des Satzes 5 folgt aus Satz 1 bzw. in ihrer zweiten Fassung nach § 1 daraus, daß die Distributivität des Verbandes $V(\mathfrak{R}-\mathfrak{l})$ damit äquivalent ist, daß V eine Kette ist, also nur aus den Moduln $\mathfrak{W}^k(\mathfrak{R}-\mathfrak{l})$ besteht, also auch damit gleichbedeutend ist, daß für alle k der zu $\mathfrak{W}^k(\mathfrak{R}-\mathfrak{l})-\mathfrak{W}^{k+1}(\mathfrak{R}-\mathfrak{l})$ isomorphe $\mathfrak{R}$-Modul $(\mathfrak{W}^k\cup\mathfrak{l})-(\mathfrak{W}^{k+1}\cup\mathfrak{l})$ irreduzibel ist.

Die Sätze 3, 4 und 5 geben eine Charakterisierung der distributiv und K-linear darstellbaren primären Ringe $\mathfrak{R}$ durch innere Ringeigenschaften und legen die Vermutung nahe, daß, falls $\mathfrak{R}$ distributiv und K-linear darstellbar ist, jedes den Voraussetzungen des Satzes 5 genügende Linksideal $\mathfrak{l}$ zu einem distributiven $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ führt. Dies ist jedoch nicht ganz richtig, wie das folgende Beispiel 2 beweist. Die Diskussion dieses Beispiels illustriert gleichzeitig die zu dem späteren Satz 7 führenden Überlegungen, in dem die Voraussetzungen aus Satz 5 über $\mathfrak{l}$ zu den genauen Bedingungen verschärft werden.

Beispiel 2. K sei ein kommutativer Körper mit unendlich vielen Elementen und $\mathfrak{R}$ der von den Matrizen

$$\tau=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15}\\ 0 & t_{11} & t_{23} & t_{24} & t_{25}\\ 0 & 0 & t_{11} & t_{34} & t_{35}\\ 0 & 0 & 0 & t_{11} & t_{45}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{11}\end{pmatrix},\qquad t_{ik}\in K, \tag{11}$$

gebildete vollständig primäre Ring mit $e=5$. Die Matrizen (11) stellen nach Satz 1 $\mathfrak{R}$ distributiv dar, da sie K-lineare Abbildungen im 5-dimensionalen Vektorraum R_5 beschreiben, dessen verbandstheoretische Länge als $\mathfrak{R}$-Modul gleich 5 ist. Es ist $\mathfrak{R}=K+\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}=\{\tau;\tau\in\mathfrak{R},t_{11}=0\}$. Nach Satz 3 enthält

jedes Ideal die $(e-1)$-te Potenz $\mathfrak{W}^4$ und für $\eta=\eta^2\neq 0$ ist $\mathfrak{W}^4\cdot\eta\neq 0$. Das Radikal $\mathfrak{W}$ ist maximales Rechtsideal r in $\mathfrak{R}$ und enthält das Element

$$\omega=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \tag{12}$$

mit $\omega^4\neq 0$. Es ist $(0:\mathfrak{r})=(0:\omega)=\{\tau;\ \tau\in\mathfrak{R},\ t_{11}=t_{12}=t_{13}=t_{14}=t_{23}=t_{24}=t_{34}=0\}$. Die Menge $\mathfrak{l}=\{\tau;\ \tau\in\mathfrak{R},\ t_{11}=t_{15}=t_{25}=t_{35}=t_{45}=0\}$ ist ein Linksideal in $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{l}\cap(0:\mathfrak{r})=0$. Da $\omega\in\mathfrak{R}$, enthält jedes echte Linksoberideal von $\mathfrak{l}$ das in $(0:\mathfrak{r})$ liegende Element $\omega^4\neq 0$. Natürlich ist auch $\mathfrak{l}K\subseteqq\mathfrak{l}$, und damit sind alle Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt. Nach ARTIN [1], Satz 9.5 A, ist die verbandstheoretische Länge von $\mathfrak{l}$ als $\mathfrak{R}$-Linksmodul $l(\mathfrak{l})=\dim_K\mathfrak{l}$, also gleich 6, und damit die verbandstheoretische Länge $l(\mathfrak{R}-\mathfrak{l})$ des $\mathfrak{R}$-Moduls $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ gleich $\dim_K\mathfrak{R}-\dim_K\mathfrak{l}=11-6=5=e$. Also stellt nach Satz 1 $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ den Ring $\mathfrak{R}$ distributiv dar. Andererseits enthält aber $\mathfrak{R}$ ein Ideal $\mathfrak{l}'$, das ebenfalls die Voraussetzungen des Satzes 5 erfüllt, für das jedoch $l(\mathfrak{R}-\mathfrak{l}')=6\neq e$ ist, so daß $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}'$ den Ring $\mathfrak{R}$ nicht distributiv darstellt. Beweis: Mit $K[\omega]$ sei der von K und ω erzeugte Unterring von $\mathfrak{R}$ bezeichnet. Jedes Ideal in $\mathfrak{R}$ ist ein $K[\omega]$-Modul. Für einen $K[\omega]$-Modul $\mathfrak{n}$ aus $\mathfrak{R}$ ist die Gleichung $\mathfrak{n}\cap(0:\mathfrak{r})=0$ damit äquivalent, daß alle Elemente $\tau=(t_{ik})$ aus $\mathfrak{n}$ den folgenden Bedingungen genügen: 1. $t_{11}=t_{45}=0$, 2. t_{15}, t_{25}, t_{35} linear abhängig von den übrigen Matrixelementen von τ, wie jetzt bewiesen werden soll. Wenn $t_{11}\neq 0$ oder $t_{11}=0$, aber $t_{45}\neq 0$ wäre, läge $\omega^4\tau=\omega^4 t_{11}$ bzw. $\omega^3\tau=\omega^4 t_{45}$ in $\mathfrak{n}\cap(0:\mathfrak{r})=\mathfrak{n}\cap(0:\omega)=0$, q.e.a. Wenn aber zwar $t_{11}=t_{45}=0$ wäre, die t_{15}, t_{25}, t_{35} jedoch nicht eindeutig durch die übrigen Matrixelemente bestimmt wären, würde auch wieder $\mathfrak{n}\cap(0:\omega)\neq 0$ sein. Die Umkehrung ist klar. — Die Abhängigkeit der t_{ik} von den übrigen Matrixelementen läßt sich genauer folgendermaßen beschreiben: Für $j=0,1,\ldots,e-1$ ist

$$\mathfrak{A}_j=\{\tau;\ \tau\in\mathfrak{R},\ \mathfrak{W}^j\tau=0\} \tag{13}$$

ein zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{R}$. Es läßt sich auch durch $\mathfrak{A}_j=\{\tau;\ \omega^j\tau=0\}$ definieren. Sei $\tilde{\nu}=\nu \bmod \mathfrak{A}_1$. Mit $\mathfrak{n}\cap(0:\omega)=0$ gilt auch $\tilde{\mathfrak{n}}\cap(\tilde{0}:\tilde{\omega})=\tilde{0}$ im Ring $\mathfrak{R}/\mathfrak{A}_1$. Beweis: Sei $\nu\in\mathfrak{n}$. Die Gleichung $\tilde{\nu}\in(\tilde{0}:\tilde{\omega})\cap\tilde{\mathfrak{n}}\neq\tilde{0}$ würde $\nu\omega\in\mathfrak{A}_1$ implizieren, also $\omega\nu\omega=0$, also $\omega\nu\in(0:\omega)\cap\mathfrak{n}=0$, also $\tilde{\nu}=\tilde{0}$, q.e.a. Aus $\tilde{\mathfrak{n}}\cap(\tilde{0}:\tilde{\omega})=\tilde{0}$ bzw. der analogen Formel für $\mathfrak{A}_2$ an Stelle von $\mathfrak{A}_1$ folgt, daß t_{k5} nur von den Matrixelementen t_{hj} mit $h\geqq k$ abhängt. Da $\mathfrak{n}$ gegenüber ω invariant ist, bestehen zwischen den Koeffizienten c_{rs} der diese linearen Abhängigkeiten beschreibenden Gleichungen solche Relationen, daß diese Gleichungen die folgende Gestalt annehmen:

$$\left.\begin{aligned}t_{15}&=c_{12}t_{12}+c_{13}t_{13}+c_{14}t_{14}+c_{23}t_{23}+c_{24}t_{24}+c_{34}t_{34},\\ t_{25}&=\qquad\qquad\qquad\quad c_{13}t_{23}+c_{14}t_{24}+c_{24}t_{34},\\ t_{35}&=\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad c_{14}t_{34}.\end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

Für jede Wahl der c_{rs} ergeben die Gln. (14) einen $K[\omega]$-Modul $\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{n}\cap(0:\omega)=0$. Jedoch ergibt nicht jede Wahl der c_{rs} auch ein Linksideal in $\mathfrak{R}$. Multipliziert man nämlich die Elemente $\tau\in\mathfrak{n}$ mit beliebigen Elementen $\sigma=(s_{ik})$ aus $\mathfrak{R}$, so ist, wie die Multiplikation der Matrizen zeigt, $\mathfrak{n}$ dann und nur dann ein Linksideal, wenn die Gleichung $s_{12}\cdot c_{24}\cdot t_{34}=c_{24}\cdot s_{23}\cdot t_{34}$ erfüllt ist, also dann und nur dann wenn entweder für alle $\tau\in\mathfrak{n}$ das $t_{34}=0$ und damit auch $t_{35}=0$ ist oder wenn $c_{24}=0$ ist. — Mit diesem Ergebnis liegt es nahe, das Linksideal $\mathfrak{l}'$ zu definieren durch

$$\mathfrak{l}'=\left\{\begin{array}{c}\tau;\ \tau\in\mathfrak{R},\ t_{11}=t_{45}=t_{34}=t_{35}=0;\ t_{15},t_{25},t_{35}\text{ gemäß (14)};\\ t_{12},t_{13},t_{14},t_{23},t_{24}\in K\end{array}\right\},$$

wobei unter den das $\mathfrak{l}'$ festlegenden Koeffizienten c_{rs} das $c_{24}\neq 0$ gewählt sei. Dieses $\mathfrak{l}'$ ist als Linksideal maximal bezüglich der Forderung $\mathfrak{l}'\cap(0:\mathfrak{r})=0$, denn jedes echte Linksoberideal $\mathfrak{l}''$ mit $\mathfrak{l}''\cap(0:\mathfrak{r})=0$ enthielte mindestens ein Element τ_0 mit $t_{34}\neq 0$. Wegen $c_{24}\neq 0$ wäre dann aber, wie gerade gezeigt, $\mathfrak{l}''$ kein Linksideal. Wohl aber gibt es einen $K[\omega]$-Modul $\mathfrak{n}''$, der Obermodul von $\mathfrak{l}'$ ist, mit $\mathfrak{n}''\cap(0:\mathfrak{r})=0$, nämlich denjenigen, der gemäß (14) aus $\mathfrak{l}'$ durch Hinzunahme der Elemente mit $t_{35}=c_{14}\cdot t_{34}$ entsteht. Das Linksideal $\mathfrak{l}'$ erfüllt somit alle Voraussetzungen von Satz 5, trotzdem stellt $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}'$ den Ring $\mathfrak{R}$ nicht distributiv dar, denn es ist $l(\mathfrak{R}-\mathfrak{l}')=\dim_K\mathfrak{R}-\dim_K\mathfrak{l}'=11-5=6+5=e$. — Wie gesagt, ist $\mathfrak{l}'$ zwar als Linksideal, nicht aber als $K[\omega]$-Modul maximal bezüglich der Forderung $\mathfrak{l}'\cap(0:\mathfrak{r})=0$. Dagegen ist das zu Beginn der Diskussion dieses Beispiels eingeführte Linksideal auch $\mathfrak{l}$ als $K[\omega]$-Modul bezüglich $\mathfrak{l}\cap(0:\mathfrak{r})=0$ maximal, und man kann sich überlegen, daß genau diejenigen den Voraussetzungen von Satz 5 genügenden Linksideale $\mathfrak{l}''$ zu distributiven $\mathfrak{R}$-Moduln $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}''$ führen, die auch als $K[\omega]$-Moduln bezüglich $\mathfrak{l}''\cap(0:\mathfrak{r})=0$ maximal sind. Dies ist nicht nur für den in diesem Beispiel diskutierten Ring so, sondern gilt allgemein, wie die folgenden Überlegungen zeigen werden.

Der primäre Ring $\mathfrak{R}=K_d+\mathfrak{W}$ sei eine Algebra endlichen Ranges über dem Grundkörper C, der mindestens $(e-1)d+1$ Elemente enthalte. Der Exponent des Radikals $\mathfrak{W}$ sei e. Der $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{m}$ stelle $\mathfrak{R}$ distributiv und K-linear dar. Wegen $\mathfrak{W}\cdot\mathfrak{W}^k=\mathfrak{W}^{k+1}$ induziert nach dem Satz von Jacobson $\mathfrak{W}$ die dichte additive Gruppe K-linearer Abbildungen des über K d-dimensionalen Moduls $\mathfrak{W}^{k-1}\mathfrak{m}-\mathfrak{W}^k\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{W}^k\mathfrak{m}-\mathfrak{W}^{k+1}\mathfrak{m}$ für $k=1,\ldots,e-1$. Also existiert zu jedem k ein ω_k in $\mathfrak{W}$, das eine umkehrbar eindeutige K-lineare Abbildung von $\mathfrak{W}^{k-1}\mathfrak{m}-\mathfrak{W}^k\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{W}^k\mathfrak{m}-\mathfrak{W}^{k+1}\mathfrak{m}$ induziert (s. auch Behrens [3], Satz 3). Es gilt sogar

Hilfssatz 2. *In $\mathfrak{W}$ existiert ein ω, das für alle $k=1,\ldots,e-1$ eine umkehrbar eindeutige K-lineare Abbildung von $\mathfrak{W}^{k-1}\mathfrak{m}-\mathfrak{W}^k\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{W}^k\mathfrak{m}-\mathfrak{W}^{k+1}\mathfrak{m}$ induziert.*

Beweis. Nach Induktionsannahme gibt es ein ω' in $\mathfrak{W}$, das dies für $k=1,\ldots,e-2$ leistet. Wie oben gezeigt, existiert ein ω_{e-1} für $\mathfrak{W}^{e-2}\mathfrak{m}-\mathfrak{W}^{e-1}\mathfrak{m}$. Dann kann man in $\omega'+c\omega_{e-2}$ das Element c in dem Grundkörper C so bestimmen, daß $\omega=\omega'+c\omega_{e-2}$ für alle k die in Hilfssatz 1 genannte Abbildung

induziert. Das läuft nämlich für $k=1, \ldots, e-2$ darauf hinaus, daß falls W' und W_{e-2} quadratische, d-reihige Matrizen mit Matrixelementen aus dem Körper K sind und dabei W' nicht singulär ist, die Matrix $W'+c \cdot W_{e-2}$ für höchstens endlich viele, genauer für höchstens d Elemente c aus dem Grundkörper C singulär ist. Dies wiederum liegt wegen $W'+cW_{e-2}=W'(E+cW'^{-1} \cdot W_{e-2})$ daran, daß die Eigenvektoren der Matrix $W'^{-1} \cdot W_{e-2}$ zu verschiedenen Eigenwerten c^{-1} voneinander K-linear unabhängig sind. Das Analoge gilt für $k=e-1$, nur ist jetzt die Matrix W_{e-2} die von vornherein nicht singuläre.

Die in Hilfssatz 2 ausgedrückte Eigenschaft des Elementes ω soll im folgenden innerhalb des Ringes $\mathfrak{R}$, d.h. ohne Verbindung mit dem Modul $\mathfrak{m}$, formuliert werden. Zur Vorbereitung dient der

HILFSSATZ 3. *Der Modul* $\mathfrak{m}$ *stelle den primären Ring* $\mathfrak{R}$ *distributiv dar. Dann stimmen die zweiseitigen Ideale*

$$\mathfrak{A}_k = \{\varrho;\ \varrho \in \mathfrak{R},\ \mathfrak{W}^k \cdot \varrho = 0\} \tag{15}$$

und

$$\{\varrho;\ \varrho \in \mathfrak{R},\ \varrho\,\mathfrak{m} \in \mathfrak{W}^{e-k}\mathfrak{m}\} \tag{16}$$

miteinander überein, und der Modul $\mathfrak{m} - \mathfrak{W}^{e-k}\mathfrak{m}$ *stellt den Faktorring* $\mathfrak{R}/\mathfrak{A}_k$ *distributiv dar.*

Beweis. 1. Aus $\varrho\,\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{W}^{e-k}\mathfrak{m}$ folgt $\mathfrak{W}^k \cdot \varrho = 0$. 2. $\mathfrak{A}_k\mathfrak{m}$ ist gleich einem $\mathfrak{W}^j\mathfrak{m}$, da $\mathfrak{m}$ den primären Ring $\mathfrak{R}$ distributiv darstellt, also nur die Kompositionsreihe der $\mathfrak{W}^i\mathfrak{m}$ besitzt. Wegen $\mathfrak{W}^k\mathfrak{A}_k=0$ ist $\mathfrak{W}^{k+j}\mathfrak{m}=0$, also $k+j \geqq e$, also $j \geqq e-k$, also $\mathfrak{A}_k\mathfrak{m}=\mathfrak{W}^j\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{W}^{e-k}\mathfrak{m}$. Die letzte Behauptung des Hilfssatzes 3 folgt daraus, daß diejenigen $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$, die $\mathfrak{W}^{e-k}\mathfrak{m}$ enthalten, einen Unterverband des distributiven Verbandes $V(\mathfrak{m})$ bilden.

Wegen $\mathfrak{W}\mathfrak{A}_k \subseteq \mathfrak{A}_{k-1}$ induziert jedes $\omega \in \mathfrak{W}$ eine Abbildung von $\mathfrak{W}^{e-k-1} \bmod \mathfrak{A}_k$ in $\mathfrak{W}^{e-k} \bmod \mathfrak{A}_{k-1}$. Wenn ω gemäß Hilfssatz 2 gewählt wird, ist diese Abbildung sogar umkehrbar eindeutig, denn aus $\nu \in \mathfrak{W}^{e-k-1}$, aber $\nu \notin \mathfrak{A}_k$, folgt $\nu\,\mathfrak{m} = \mathfrak{W}^{e-k}\mathfrak{m}$, also $\omega\nu\,\mathfrak{m} \subsetneqq \mathfrak{W}^{e-k+1}\mathfrak{m}$, also $\omega\nu \notin \mathfrak{A}_{k-1}$. Die Bilder unter ω füllen sogar $\mathfrak{W}^{e-k} \bmod \mathfrak{A}_{k-1}$ aus. Weil nämlich $\mathfrak{W}^{e-k-1} \cdot \mathfrak{W}\mathfrak{m} = \mathfrak{W}^{e-k}\mathfrak{m}$ ist, entsprechen die Elemente von $\mathfrak{W}^{e-k-1} \bmod \mathfrak{A}_k$ umkehrbar eindeutig den von $\mathfrak{R}$ induzierten Abbildungen von $\mathfrak{m} - \mathfrak{W}\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{W}^{e-k-1}\mathfrak{m} - \mathfrak{W}^{e-k}\mathfrak{m}$, also nach dem Satz von JACOBSON den Elementen dieser dichten additiven Gruppe K-linearer Abbildungen. Analog entspricht $\mathfrak{W}^{e-k} \bmod \mathfrak{A}_{k-1}$ der dichten Gruppe K-linearer Abbildungen von $\mathfrak{m} - \mathfrak{W}\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{W}^{e-k}\mathfrak{m} - \mathfrak{W}^{e-k+1}\mathfrak{m}$. Da schließlich nach Hilfssatz 2 das ω eine umkehrbar eindeutige, K-lineare Abbindung von $\mathfrak{W}^{e-k-1}\mathfrak{m} - \mathfrak{W}^{e-k}\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{W}^{e-k}\mathfrak{m} - \mathfrak{W}^{e-k+1}\mathfrak{m}$ induziert, füllt das Bild von $\mathfrak{W}^{e-k-1} \bmod \mathfrak{A}_k$ unter ω das $\mathfrak{W}^{e-k} \bmod \mathfrak{A}_{k-1}$ aus.

Ein nach Hilfssatz 2 gewähltes Element ω induziert also eine umkehrbar eindeutige K-lineare Abbildung von $\mathfrak{W}^{e-k-1} \bmod \mathfrak{A}_k$ auf $\mathfrak{W}^{e-k} \bmod \mathfrak{A}_{k-1}$. Diese Abbildung ist im allgemeinen kein $\mathfrak{R}$-Isomorphismus, wohl aber bildet ω den Verband der $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{W}^{e-k-1} \bmod \mathfrak{A}_k$ verbandsisomorph auf den analogen Verband von $\mathfrak{W}^{e-k} \bmod \mathfrak{A}_{k-1}$ ab. Das ist völlig klar für den Verband

der K-Rechtsuntermoduln von $\mathfrak{W}^{e-k-1} \bmod \mathfrak{A}_k$, da ω K-linear ist. Für den Verband der $\mathfrak{R}$-Untermoduln bedarf dies jedoch des folgenden Beweises:

Die Elemente aus $\mathfrak{R}$ induzieren durch Linksmultiplikation mit ihnen den dichten Ring K-linearer Abbildungen von $\mathfrak{W}^{e-k-1}\mathfrak{m} - \mathfrak{W}^{e-k}\mathfrak{m}$ in sich, da dieser Faktormodul ein irreduzibler $\mathfrak{R}$-Modul ist. ω induziert gemäß Hilfssatz 2 eine umkehrbar eindeutige, K-lineare Abbildung von $\mathfrak{W}^{e-k-1}\mathfrak{m} - \mathfrak{W}^{e-k}\mathfrak{m}$ auf den Modul $\mathfrak{W}^{e-k}\mathfrak{m} - \mathfrak{W}^{e-k+1}\mathfrak{m}$. Da auch dieser ein irreduzibler $\mathfrak{R}$-Modul ist, induzieren die Elemente aus der additiven Gruppe $\mathfrak{R} \cdot \omega$ die dichte Gruppe K-linearer Abbildungen des ersten dieser Faktormoduln in den zweiten. Andererseits induziert für jedes $\tau \in \mathfrak{R}$ auch $\omega\tau$ eine K-lineare Abbildung des ersten Faktormoduls in den zweiten. Also existiert zu vorgegebenem $\tau \in \mathfrak{R}$ ein $\tau' \in \mathfrak{R}$ so, daß $\omega\tau$ und $\tau'\omega$ dieselbe K-lineare Abbildung des ersten Faktormoduls in den zweiten induzieren. Das bedeutet $(\omega\tau - \tau'\omega)\,\mathfrak{W}^{e-k-1}\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{W}^{e-k+1}\mathfrak{m}$ oder, unter Verwendung von Hilfssatz 3 anders ausgedrückt,

$$(\omega\tau - \tau'\omega)\,\mathfrak{W}^{e-k-1} \subseteq \mathfrak{A}_{k-1}, \tag{17}$$

wobei $\tau' = \tau'(\tau, k)$. Zu τ aus $\mathfrak{R}$ existiert also ein τ' in $\mathfrak{R}$ derart, daß $\omega\tau$ und $\tau'\omega$ dieselbe Abbildung von $\mathfrak{W}^{e-k-1} \bmod \mathfrak{A}_k$ in $\mathfrak{W}^{e-k} \bmod \mathfrak{A}_{k-1}$ induzieren. Dies impliziert die Verbandsisomorphie. Sei nämlich $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{R}$-Linksmodul aus $\mathfrak{W}^{e-k-1} \bmod \mathfrak{A}_k$ und $\mathfrak{q}' = \omega\mathfrak{q}'$ sein Bild in $\mathfrak{W}^{e-k} \bmod \mathfrak{A}_{k-1}$ unter ω. Dann gilt, wegen (17), $\mathfrak{R}\mathfrak{q}' = \mathfrak{R}\omega\mathfrak{q} = \omega\mathfrak{R}\mathfrak{q} = \omega\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$, also ist $\mathfrak{q}'$ ebenfalls $\mathfrak{R}$-Linksmodul. Sei ferner $\mathfrak{q}'$ ein vorgegebener $\mathfrak{R}$-Linksmodul aus $\mathfrak{W}^{e-k} \bmod \mathfrak{A}_{k-1}$ und der K-Rechtsmodul $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{W}^{e-k-1} \bmod \mathfrak{A}_k$ sein Urbild unter ω. Sei $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{R}\mathfrak{q}$ der kleinste $\mathfrak{q}$ enthaltende $\mathfrak{R}$-Modul. Dann folgt aus $\omega\mathfrak{q}_0 = \omega\mathfrak{R}\mathfrak{q} = \mathfrak{R}\omega\mathfrak{q} = \mathfrak{R}\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}'$, daß $\omega\mathfrak{q}_0 = \omega\mathfrak{q}$, also $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{q}$, also $\mathfrak{q}$ ebenfalls $\mathfrak{R}$-Modul ist. Dies zeigt, daß ω einen Verbandsisomorphismus zwischen den $\mathfrak{R}$-Moduln induziert und beweist dadurch auch noch die letzte Behauptung des folgenden

Satz 6. *Voraussetzung. Der primäre Ring $\mathfrak{R}$ sei eine Algebra endlichen Ranges über dem kommutativen Körper C. Dieser enthalte mindestens $(e-1)\,d+1$ Elemente. Sei e der Exponent des Radikales $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{R} = K_d + \mathfrak{W}$. Der Modul $\mathfrak{m}$ stelle $\mathfrak{R}$ distributiv und K-linear dar.*

Behauptung. In $\mathfrak{W}$ existiert ein Element ω, das für $k = 1, \ldots, e-1$ den Modul $\mathfrak{W}^{k-1}\mathfrak{m} - \mathfrak{W}^{k}\mathfrak{m}$ umkehrbar eindeutig und K-linear durch Multiplikation dieses Moduls mit ω von links auf $\mathfrak{W}^{k}\mathfrak{m} - \mathfrak{W}^{k+1}\mathfrak{m}$ abbildet. Ein solches ω induziert eine umkehrbar eindeutige und K-lineare Abbildung von $\mathfrak{W}^{e-k-1} \bmod \mathfrak{A}_k$ auf $\mathfrak{W}^{e-k} \bmod \mathfrak{A}_{k-1}$, wobei das Ideal $\mathfrak{A}_k = \{\varrho;\ \varrho \in \mathfrak{R},\ \mathfrak{W}^k \cdot \varrho = 0\}$ der Rechtsannullator von $\mathfrak{W}^k$ ist. Diese Abbildung ist im allgemeinen kein $\mathfrak{R}$-Isomorphismus, wohl aber bildet $\mathfrak{q} \to \omega\mathfrak{q}$ den Verband der $\mathfrak{R}$-Untermoduln $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{W}^{e-k-1} \bmod \mathfrak{A}_k$ verbandsisomorph auf den entsprechenden Verband von $\mathfrak{W}^{e-k} \bmod \mathfrak{A}_{k-1}$ ab.

Korollar zu Satz 6. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 6 sei $0 \neq \eta = \eta^2 \in \mathfrak{R}$ und in $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{W}$ das Linksideal $\overline{\mathfrak{R}} \cdot \bar{\eta}$ minimal. Dann ist $\mathfrak{W}^{e-1} \cdot \eta$ ein minimales Linksideal in $\mathfrak{R}$.*

Beweis. Da $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$ ein einfacher Ring ist, ist $\mathfrak{A}_{e-1} = \{\varrho;\ \varrho \in \mathfrak{R},\ \mathfrak{W}^{e-1} \cdot \varrho = 0\} = \mathfrak{W}$. Also induziert ω nach Satz 6 einen Verbandsisomorphismus des Verbandes

der $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}=\mathfrak{R} \bmod \mathfrak{A}_{\varrho-1}$ auf den Verband von $\mathfrak{W} \bmod \mathfrak{A}_{\varrho-2}$. Wiederholte Anwendung von ω ergibt in $\mathfrak{q} \to \omega^{\varrho-1} \cdot \mathfrak{q}$ einen Verbandsisomorphismus zwischen den $\mathfrak{R}$-Untermoduln $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$ und denen von $\mathfrak{W}^{\varrho-1} \bmod \mathfrak{A}_0=\mathfrak{W}^{\varrho-1}$. Insbesondere geht dabei $\mathfrak{R}\eta \bmod \mathfrak{W}$ über in $\omega^{\varrho-1} \cdot \mathfrak{R}\eta$. Dieses ist daher ein minimaler $\mathfrak{R}$-Modul aus $\mathfrak{W}^{\varrho-1}$, also ein minimales Linksideal in $\mathfrak{R}$. Zu zeigen bleibt noch die Gleichung $\omega^{\varrho-1} \cdot \mathfrak{R}=\mathfrak{W}^{\varrho-1}$. Diese folgt nach Satz 6 aus den Gleichungen

$$\omega \cdot (\mathfrak{R} \bmod \mathfrak{A}_{\varrho-1}) = \mathfrak{W} \bmod \mathfrak{A}_{\varrho-2},$$
$$\omega \cdot (\mathfrak{W} \bmod \mathfrak{A}_{\varrho-2}) = \mathfrak{W}^2 \bmod \mathfrak{A}_{\varrho-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\omega \cdot (\mathfrak{W}^{\varrho-1} \bmod \mathfrak{A}_1) = \mathfrak{W}^{\varrho-1} \bmod \mathfrak{A}_0,$$

also $\omega^{\varrho-1} \cdot \mathfrak{R}=\mathfrak{W}^{\varrho-1} \cup \mathfrak{A}_0=\mathfrak{W}^{\varrho-1}$. Q.e.d.

Schließlich sei noch bemerkt, daß, falls ω sich so wählen läßt, daß außer den in Hilfssatz 2 genannten Eigenschaften noch $\tau'(\tau, k)=\tau$ für alle $\tau \in \mathfrak{R}$ in (17) gilt, ω sogar einen $\mathfrak{R}$-Isomorphismus zwischen den beiden $\mathfrak{R}$-Moduln $\mathfrak{W}^{\varrho-k-1} \bmod \mathfrak{A}_k$ und $\mathfrak{W}^{\varrho-k} \bmod \mathfrak{A}_{k-1}$ induziert.

Unter den Voraussetzungen des Satzes 6 lassen sich, wie die nachstehenden Untersuchungen zeigen werden, diejenigen Linksideale $\mathfrak{l}$, für die $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ den Ring $\mathfrak{R}$ distributiv und K-linear darstellt, durch folgende Eigenschaften charakterisieren: 1. $\mathfrak{l}K \subseteqq \mathfrak{l}$, 2. für ein geeignetes maximales Rechtsideal $\mathfrak{r}$ aus $\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{l}$ bezüglich der Forderung $\mathfrak{l} \cap (0:\mathfrak{r})=0$ nicht nur als Linksideal sondern sogar als ω-Modul maximal. Hierbei ist ω irgendeines derjenigen Elemente ω, deren Existenz in Satz 6 bewiesen wurde.

1. $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ stelle $\mathfrak{R}$ distributiv dar. Da $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ K-linear sein soll, ist $\mathfrak{l}K \subseteqq \mathfrak{l}$ zu fordern. Ferner ist nach Satz 4 das $\mathfrak{l}$ als Linksideal maximal bezüglich $\mathfrak{l} \cap (0:\mathfrak{r})=0$, wobei sich das maximale Rechtsideal $\mathfrak{r}=\varepsilon\mathfrak{R} \cup \mathfrak{W}$ durch ein in $\mathfrak{l}$ enthaltenes Idempotent ε, welches in $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$ zu dem maximalen Linksideal $\overline{\mathfrak{R}} \cdot \overline{\varepsilon}=\overline{\mathfrak{l}}$ führt, definieren läßt. Zu beweisen bleibt, daß jeder echte ω-Obermodul $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{l}$ das Linksideal $(0:\mathfrak{r})$ nicht nur im Nullelement schneidet. Da jeder ω-Modul ein $C[\omega]$-Modul ist und die Algebra $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{C}$ endlichen Rang hat, ist klar, daß die Minimalbedingung für ω-Moduln in $\mathfrak{R}$ erfüllt ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei daher $\mathfrak{p}$ ein minimaler ω-Obermodul von $\mathfrak{l}$ und das Element $\pi \in \mathfrak{p}$, aber $\pi \notin \mathfrak{l}$. Sei k die kleinste natürliche Zahl für die $\pi \in \mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_k$, aber $\pi \notin \mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_{k-1}$ gilt; diese existiert, da nach Voraussetzung π nicht in $\mathfrak{l}=\mathfrak{l} \cup 0=\mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_0$ liegt, wohl aber in $\mathfrak{R}=\mathfrak{A}_\varrho$. Aus $\mathfrak{A}_k=\{\varrho; \mathfrak{W}^k \cdot \varrho=0\}$ folgt

$$\mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_k = \mathfrak{l} \cup \mathfrak{W}^{\varrho-k}, \tag{18}$$

denn wegen $\mathfrak{W}^\varrho=0$ ist $\mathfrak{W}^{\varrho-k} \subseteqq \mathfrak{A}_k$ klar und aus $\alpha \in \mathfrak{A}_k$ folgt nach Hilfssatz 3, (16), für den $\mathfrak{R}$ distributiv darstellenden Modul $\mathfrak{m}=\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ die Beziehung $\alpha\mathfrak{m} \subseteqq \mathfrak{W}^{\varrho-k}\mathfrak{m}$, also $\alpha\mathfrak{R} \subseteqq \mathfrak{W}^{\varrho-k} \bmod \mathfrak{l}$, also $\alpha \in \mathfrak{W}^{\varrho-k} \cup \mathfrak{l}$. Nach (18) liegt π in $\mathfrak{l} \cup \mathfrak{W}^{\varrho-k}$ und ist daher in der Form $\pi=\lambda+\nu$ darstellbar, wobei λ in $\mathfrak{l}$ und das Element ν in $\mathfrak{W}^{\varrho-k}$, aber nicht in $\mathfrak{A}_{k-1}$ liegt, da sonst π bereits in $\mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_{k-1}$ läge. Nach Satz 6 bildet ω den Modul $\mathfrak{W}^{\varrho-k} \bmod \mathfrak{A}_{k-1}$ umkehrbar eindeutig auf den Modul $\mathfrak{W}^{\varrho-k+1} \bmod \mathfrak{A}_{k-2}$ ab. Demnach repräsentiert, weil ν nicht in

$\mathfrak{A}_{k-1}$, das Element $\omega\nu$ nicht die Nullklasse in $\mathfrak{W}^{e-k+1}$ mod $\mathfrak{A}_{k-2}$, und weiter $\omega^{k-1}\nu$ nicht das Nullelement in $\mathfrak{W}^{e-1}$ mod $\mathfrak{A}_0=\mathfrak{W}^{e-1}$. Da $\varepsilon\in\mathfrak{l}$ und $\eta=1-\varepsilon$, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\pi=\pi\eta$, also $\nu=\nu\eta$ voraussetzen und erhält in $\omega^{k-1}\nu\eta$ ein von Null verschiedenes Element aus $\mathfrak{W}^{e-1}\cdot\eta$. Weil $\mathfrak{p}$ minimaler ω-Obermodul von $\mathfrak{l}$ ist, liegt $\omega\pi$ in $\mathfrak{l}$, denn sonst würde $\mathfrak{p}$ einen ω-Modul $\mathfrak{p}'=\mathfrak{l}+C\cdot\omega^j\pi$ mit $\mathfrak{l}\subset\mathfrak{p}'\subset\mathfrak{p}$ enthalten. Aus $\omega\pi\in\mathfrak{l}$ folst $\omega\nu\in\mathfrak{l}$, da $\bar{\pi}=\lambda+\nu$, also auch $0\neq\omega^{k-1}\nu=\omega^{k-1}\nu\eta\in\mathfrak{l}$. Andererseits liegt $\omega^{k-1}\nu\eta$ in $(0;\mathfrak{r})$, denn es ist $\omega^{k-1}\nu\eta\cdot\mathfrak{r}=\omega^{k-1}\nu\eta\cdot(\varepsilon\mathfrak{R}\cup\mathfrak{W})=0$. Also trifft jeder ω-Obermodul von $\mathfrak{l}$ das Linksideal $(0:\mathfrak{r})$ in einem von 0 verschiedenen Element.

2. Bei dem Beweis der Umkehrung folgt nach Satz 5 daraus daß $\mathfrak{l}$ ein bezüglich $\mathfrak{l}\cap(0:\mathfrak{r})=0$ maximaler ω-Modul, also erst recht ein maximales Linksideal ist, und aus $\mathfrak{l}K\subseteq\mathfrak{l}$, daß $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ den Ring $\mathfrak{R}$ treu und K-linear darstellt. Zu zeigen bleibt, daß der Verband der $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ distributiv ist. Hierbei benötigt man die Gl. (18) für $k=1$, also einen Beweis dafür, daß mit den Bezeichnungen und unter den Voraussetzungen der Sätze 5 und 6 das Linksideal $\mathfrak{l}$ die Gleichung

$$\mathfrak{l}\cup\mathfrak{A}_1=\mathfrak{l}+\mathfrak{W}^{e-1}\cdot\eta \tag{19}$$

erfüllt, falls $\mathfrak{l}$ bezüglich $\mathfrak{l}\cap(0:\mathfrak{r})=0$ auch als ω-Modul maximal ist. In (19) ist $\mathfrak{W}^{e-1}\cdot\eta\subseteq\mathfrak{W}^{e-1}\subseteq\mathfrak{A}_1$ trivial. Sei $\alpha\in\mathfrak{A}_1$, $\alpha\notin\mathfrak{l}$. Wegen $\omega\mathfrak{A}_1=0$, ist $\mathfrak{l}+C\cdot\alpha$ ein ω-Obermodul von $\mathfrak{l}$ und muß nach der Voraussetzung über $\mathfrak{l}$ das Linksideal $(0;\mathfrak{r})$ in einem Element $\lambda+c\cdot\alpha$ schneiden, wobei λ in $\mathfrak{l}$ und $c\neq0$ in C liegt. Hierbei ist λ ebenfalls in $\mathfrak{A}_1$ enthalten, denn sonst wäre $0\neq\mathfrak{W}\lambda=\mathfrak{W}(\lambda+c\alpha)\in\mathfrak{l}\cap(0:\mathfrak{r})=0$. Aus $\lambda+c\alpha\in\mathfrak{A}_1\cap(0:\mathfrak{r})$ folgt, daß $\lambda+c\alpha$ den $\mathfrak{R}$ distributiv darstellenden $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{m}$ abbildet in $\mathfrak{A}_1\mathfrak{m}=\mathfrak{W}^{e-1}\mathfrak{m}$ und dabei, wegen $\mathfrak{W}\subseteq\mathfrak{r}$, der Untermodul $\mathfrak{W}\mathfrak{m}$ in 0 übergeht. Mit anderen Worten $\lambda+c\alpha$ ist eine K-lineare Abbildung von $\mathfrak{m}-\mathfrak{W}\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{W}^{e-1}\mathfrak{m}$. Nach dem Satz von Jacobson und wegen $\mathfrak{W}^{e-1}\cdot\mathfrak{W}\mathfrak{m}=0$ existiert ein ν in $\mathfrak{W}^{e-1}$, das dieselbe Abbildung von $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{W}^{e-1}\mathfrak{m}$ bewirkt. Also ist $(\lambda+c\alpha-\nu)\mathfrak{m}=0$ und daher $\lambda+c\alpha-\nu=0$, denn $\mathfrak{m}$ ist treu. Wegen $c\neq0$, c im Körper C liegt $\alpha=c^{-1}\cdot(\nu-\lambda)$ in $\mathfrak{W}^{e-1}\cup\mathfrak{l}$. Da schließlich $\alpha=\alpha\varepsilon+\alpha\eta$ und $\alpha\varepsilon\in\mathfrak{l}$, gilt (19). Dabei steht recht eine direkte Summe von Linksidealen, weil $\mathfrak{l}\cap\mathfrak{W}^{e-1}\cdot\eta\subseteq\mathfrak{l}\cap(0:\mathfrak{r})=0$ ist.

3. Der Beweis dafür, daß $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ den Ring $\mathfrak{R}$ distributiv darstellt, werde nun durch vollständige Induktion nach dem Exponenten e des Radikales $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{R}$ zu Ende geführt. Die Verankerung bei $e=1$ bietet überhaupt keine Schwierigkeiten, da dann $\mathfrak{R}$ ein einfacher Ring, also $\mathfrak{l}$ ein maximales Linksideal ist. Zu zeigen ist zunächst, daß, falls die obigen Voraussetzungen über $\mathfrak{l}$ zutreffen, sie dann auch für $\bar{\mathfrak{l}}$ in dem Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{A}_1$ gelten. Wenn $\mathfrak{m}$ ein distributiver $\mathfrak{R}$-Modul ist, stellt naxh Hilfssatz 3 der Modul $\mathfrak{m}-\mathfrak{W}^{e-1}\mathfrak{m}$ den Ring $\mathfrak{R}/\mathfrak{A}_1$ distributiv dar. Im folgenden bedeutet der Querstrich die Restklassenbildung modulo $\mathfrak{A}_1$. Auch für $\bar{\mathfrak{l}}$ in $\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{A}_1$ gilt die Gleichung $\bar{\mathfrak{l}}\cap(\bar{0}:\bar{\mathfrak{r}})=\bar{0}$, denn aus $\bar{0}\neq\bar{\lambda}\in\bar{\mathfrak{l}}\cap(\bar{0}:\bar{\mathfrak{r}})$ würde $\bar{\lambda}\cdot\bar{\mathfrak{r}}=\bar{0}$, also $\lambda\cdot\mathfrak{r}\subseteq\mathfrak{A}_1$ für ein die Restklasse $\bar{\lambda}$ mod $\mathfrak{A}_1$ repräsentierendes Element λ aus $\mathfrak{l}$ folgen; da $\bar{\lambda}\neq\bar{0}$, wäre $\lambda\notin\mathfrak{A}_1$, also $\mathfrak{W}\lambda\neq0$, aber $\mathfrak{W}\lambda\mathfrak{r}\subseteq\mathfrak{W}\mathfrak{A}_1=0$, was $\mathfrak{l}\cap(0:\mathfrak{r})\neq0$ widerspräche. — Da nach Hilfssatz 3 $\mathfrak{A}_1=\{\varrho;\varrho\,\mathfrak{m}\subseteq\mathfrak{W}^{e-1}\mathfrak{m}\}$, besitzt $\bar{\omega}$ die in Hilfssatz 2

genannten Eigenschaften in $\overline{\mathfrak{R}}$ bezüglich $\mathfrak{m} - \mathfrak{W}^{e-1}\mathfrak{m}$. — Nun sei $\bar{\mathfrak{p}}$ ein echter $\bar{\omega}$-Obermodul von $\bar{\mathfrak{l}} = \mathfrak{l} \bmod \mathfrak{A}_1$. Die Annahme, daß $\bar{\mathfrak{p}} \cap (\bar{0} : \bar{\mathfrak{r}}) = \bar{0}$ sei, soll zu einem Widerspruch geführt werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $\bar{\mathfrak{p}}$ ein minimaler $C[\bar{\omega}]$-Obermodul von $\bar{\mathfrak{l}}$, also $\bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{l}} + C \cdot \bar{\pi}$, wobei $\bar{\pi} \notin \bar{\mathfrak{l}}$, aber $\bar{\omega}\bar{\pi} \in \bar{\mathfrak{l}}$. Dann ist entweder $\omega\pi \in \mathfrak{l}$ für einen geeigneten Repräsentanten π der Restklasse $\bar{\pi}$, oder es ist, wie unter 2. bewiesen, $\omega\pi \in \mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{l} + \mathfrak{W}^{e-1} \cdot \eta$, etwa $\omega\pi = \lambda + \nu$, $\lambda \in \mathfrak{l}$, $\nu \in \mathfrak{W}^{e-1} \cdot \eta$. Nach Satz 6 bildet ω den Modul $\mathfrak{W}^{e-2} \bmod \mathfrak{A}_1$ ab auf den Modul $\mathfrak{W}^{e-1} \bmod \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{W}^{e-1}$. Also existiert ein $\nu' = \nu'\eta$ in $\mathfrak{W}^{e-2}$ mit $\omega\nu' = \nu$. Setze $\pi' = \pi - \nu'$. Dann gilt: a) $\omega\pi' = \omega\pi - \omega\nu' = \lambda + \nu - \nu = \lambda \in \mathfrak{l}$. — b) $\bar{\mathfrak{p}}' = \bar{\mathfrak{l}} + C\bar{\pi}'$ ist ebenfalls ein echter $\bar{\omega}$-Obermodul von $\bar{\mathfrak{l}}$, für den $\bar{\mathfrak{p}}' \cap (\bar{0} : \bar{\mathfrak{r}}) = \bar{0}$ ist. Wäre nämlich $\bar{\pi}' \in \bar{\mathfrak{l}}$, dann wäre $\bar{\pi} - \bar{\nu}' \in \bar{\mathfrak{l}}$, also $\bar{\nu}' \in \bar{\mathfrak{l}} + C\bar{\pi} = \bar{\mathfrak{p}}'$. Dies widerspricht jedoch der Annahme über $\bar{\mathfrak{p}}$, denn $\bar{\nu}' = \bar{\nu}' \cdot \bar{\eta}$ liegt in $\overline{\mathfrak{W}}^{e-2} \cdot \bar{\eta}$, also wäre $\bar{\nu}' \cdot \bar{\mathfrak{r}} = \bar{\nu}' \cdot (\bar{\varepsilon} \cdot \overline{\mathfrak{R}} \cup \overline{\mathfrak{W}}) = \bar{0}$, also $\bar{\mathfrak{p}} \cap (\bar{0} : \bar{\mathfrak{r}}) \neq \bar{0}$. Damit ist $\bar{\pi}' \notin \bar{\mathfrak{l}}$ bewiesen. Aus $\bar{\nu}' \in \overline{\mathfrak{W}}^{e-2} \cdot \bar{\eta}$ folgt $\bar{\nu}' \cdot \bar{\mathfrak{r}} = \bar{0}$ und damit $\bar{\pi}' \cdot \bar{\varrho} = \bar{\pi} \cdot \bar{\varrho}$ für alle $\varrho \in \mathfrak{r}$, also $\bar{\mathfrak{p}}' \cap (\bar{0} : \bar{\mathfrak{r}}) = \bar{0}$. c) Nach dem unter a) und b) Bewiesenen kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß bereits $\omega\pi$ in $\mathfrak{l}$ liegt, also $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} + C \cdot \pi$ ein echter ω-Obermodul von $\mathfrak{l}$ ist. Denn $\pi \in \mathfrak{l}$ würde $\bar{\pi} \in \bar{\mathfrak{l}}$ nach sich ziehen. Nun war das Linksideal $\mathfrak{l}$ auch als ω-Modul als maximal bezüglich $\mathfrak{l} \cap (0 : \mathfrak{r}) = 0$ vorausgesetzt, $\mathfrak{p}$ enthält demnach ein Element $\lambda + c\pi$, $\lambda \in \mathfrak{l}$, $c \in C$, $c \neq 0$, das in $(0 : \mathfrak{r})$ liegt. Dies widerspricht aber $\bar{\pi} \notin \bar{\mathfrak{l}}$, denn $(\lambda + c\pi) \cdot \mathfrak{r} = 0$ impliziert $\bar{\lambda} + \bar{c}\bar{\pi} \in \bar{\mathfrak{p}} \cap (\bar{0} : \bar{\mathfrak{r}}) = \bar{0}$, also $\bar{\pi} = c^{-1} \cdot \bar{\lambda} \in \bar{\mathfrak{l}}$. Damit ist gezeigt, daß das Linksideal $\bar{\mathfrak{l}} = \mathfrak{l} \bmod \mathfrak{A}_1$ in dem durch $\mathfrak{m} - \mathfrak{W}^{e-1}\mathfrak{m}$ distributiv dargestellten Ring $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{A}_1$ auch als $\bar{\omega}$-Modul maximal ist bezüglich der Forderung $\bar{\mathfrak{l}} \cap (\bar{0} : \bar{\mathfrak{r}}) = \bar{0}$. Natürlich gilt $\mathfrak{l}K \subseteq \mathfrak{l}$. Nach Induktionsannahme stellt demnach der $\mathfrak{R}$-Modul $\overline{\mathfrak{R}} - \bar{\mathfrak{l}}$ den Faktorring $\overline{\mathfrak{R}}$ distributiv dar, seine verbandstheoretische Länge $l\big(V(\overline{\mathfrak{R}} - \bar{\mathfrak{l}})\big)$ ist also nach Satz 1 gleich dem Exponenten $e-1$ des Radikales $\overline{\mathfrak{W}} = \mathfrak{W} \bmod \mathfrak{A}_1$ von $\overline{\mathfrak{R}}$. Hieraus folgt wegen $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{R}$ für die verbandstheoretischen Längen der $\mathfrak{R}$-Linksmoduln die Gleichung $l\big(V(\mathfrak{R} - \mathfrak{l})\big) = l\big(V(\mathfrak{R} - (\mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_1))\big) + l\big(V((\mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_1) - \mathfrak{l})\big)$. Dabei ist $l\big(V(\mathfrak{R} - (\mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_1))\big) = l\big(V(\overline{\mathfrak{R}} - \bar{\mathfrak{l}})\big)$ und wegen (19) $l\big(V((\mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}) - \mathfrak{l})\big) = l\big(V((\mathfrak{l} + \mathfrak{W}^{e-1} \cdot \eta) - \mathfrak{l})\big) = l\big(V(\mathfrak{W}^{e-1} \cdot \eta)\big)$. Nun ist nach dem Korollar zu Satz 6 das Produkt $\mathfrak{W}^{e-1} \cdot \eta$ ein minimales Linksideal in $\mathfrak{R}$, also ist $l\big(V(\mathfrak{W}^{e-1} \cdot \eta)\big) = 1$, also $l\big(V(\mathfrak{R} - \mathfrak{l})\big) = (e-1) + 1 = e$, also stellt nach Satz 1 der $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ den Ring $\mathfrak{R}$ distributiv dar.

Damit lassen sich diejenigen Linksideale aus $\mathfrak{R}$, die zu distributiven $\mathfrak{R}$-Moduln $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ führen, durch den folgenden Satz vollständig charakterisieren:

SATZ 7. *Voraussetzung.* $\mathfrak{R} = K_d + \mathfrak{W}$ *sei eine primäre Algebra endlichen Ranges über ihrem Grundkörper* C. *Dieser enthalte mindestens* $(e-1)d+1$ *Elemente.* $\mathfrak{R}$ *sei distributiv und* K*-linear darstellbar. In* $\mathfrak{W}$ *sei das Element* ω *gemäß Satz* 6 *gewählt.*

Behauptung. Bis auf Isomorphie sind die $\mathfrak{R}$ *distributiv und* K*-linear darstellenden Moduln* $\mathfrak{m}$ *diejenigen Faktormoduln* $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$, *deren Linksideal* $\mathfrak{l}$ *folgenden beiden Bedingungen genügt*: 1. *Für mindestens ein maximales Rechtsideal* $\mathfrak{r}$ *aus* $\mathfrak{R}$ *gilt* $\mathfrak{l} \cap (0 : \mathfrak{r}) = 0$, *jedoch ist* $\mathfrak{p} \cap (0 : \mathfrak{r}) \neq 0$ *für jeden echten* ω*-Obermodul* $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{l}$, 2. $\mathfrak{l}K \subseteq \mathfrak{l}$.

Wenn für das Idempotent ε' gilt $\varepsilon' = \alpha^{-1}\varepsilon\alpha$, s. N. JACOBSON [4], III, §10, Satz 2, dann gehört zu $\mathfrak{r}' = \varepsilon'\mathfrak{R} \cup \mathfrak{W}$ das Linksideal $\mathfrak{l}' = \mathfrak{l}\alpha$ so, wie oben $\mathfrak{l}$ zu $\mathfrak{R}$ gehört. Dabei sind $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ und $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}'$ zueinander $\mathfrak{R}$-isomorph.

Es bleibt noch die Aufgabe, unter den zu distributiven $\mathfrak{R}$-Moduln $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ führenden Linksidealen $\mathfrak{l}$ diejenigen mit einander in Verbindung zu bringen, die zu isomorphen Moduln $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ führen. Das wird im folgenden Paragraphen in einem größeren Rahmen geschehen (Sätze 8 und 9).

Das in den verschiedenen Sätzen dieses Paragraphens Gesagte läßt sich zu folgendem Kriterium für die distributive und K-lineare Darstellbarkeit einer primären Algebra $\mathfrak{R} = K_d + \mathfrak{W}$ von endlichem Rang über ihrem, mindestens $(e-1)d+1$ Elemente enthaltenden, Grundkörper C zusammentragen:

Der Exponent des Radikales $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{R}$ sei e. Das Ideal $\mathfrak{A}_k$ sei der Rechtsannullator $(0 \cdot \mathfrak{W}^k)$ von $\mathfrak{W}^k$, also die Menge $\{\varrho;\ \varrho \in \mathfrak{R},\ \mathfrak{W}^k\varrho = 0\}$. Sei $\mathfrak{r}$ ein maximales Rechtsideal in $\mathfrak{R}$. Für die distributive und K-lineare Darstellbarkeit von $\mathfrak{R}$ ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend: 1. *Jedes Ideal in $\mathfrak{R}$ enthält $\mathfrak{W}^{e-1}$, und das Produkt $\mathfrak{W}^{e-1} \cdot \eta$ ist für jedes Idempotent $\eta \neq 0$ aus $\mathfrak{R}$ von 0 verschieden* (*Satz* 4), 2. *in $\mathfrak{W}$ existiert ein Element ω, das für $k = 0, 1, \ldots, e-1$ den K-Rechtsmodul $\mathfrak{W}^{e-k-1} \bmod \mathfrak{A}_k$ auf $\mathfrak{W}^{e-k} \bmod \mathfrak{A}_{k-1}$ durch Linksmultiplikation mit ω umkehrbar eindeutig und K-linear abbildet* (*Satz* 6), 3. *für ein und damit auch für jedes $\mathfrak{l} K \leqq \mathfrak{l}$ erfüllende Linksideal $\mathfrak{l}$ aus $\mathfrak{R}$, das als ω-Linksmodul bezüglich der Forderung $\mathfrak{l} \cap (0:\mathfrak{r}) = 0$ maximal ist, sind die $\mathfrak{R}$-Moduln $(\mathfrak{W}^k \cup \mathfrak{l}) - (\mathfrak{W}^{k+1} \cup \mathfrak{l})$ für alle k irreduzibel* (*Sätze* 5 *und* 7). — *Die distributiven $\mathfrak{R}$-Moduln sind zu den mit den obigen Linksidealen $\mathfrak{l}$ gebildeten Faktormoduln $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ isomorph* (*Satz* 7).

§ 3

1. Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring mit Einselement, der die Minimalbedingung für Linksideale erfüllt. $\mathfrak{m}$ sei ein treuer $\mathfrak{R}$-Modul mit distributivem $\mathfrak{R}$-Untermodulverband $V_l(\mathfrak{m})$. Nach Satz 2 ist $\mathfrak{m}$ zyklisch und daher $\mathfrak{m}$ als $\mathfrak{R}$-Modul isomorph zu $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$, wobei $\mathfrak{l}$ ein Linksideal aus $\mathfrak{R}$ ist. Zunächst sollen alle diejenigen Linksideale $\mathfrak{l}'$ angegeben werden, die zu $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ isomorphen $\mathfrak{R}$-Moduln $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}'$ führen, und dann die Untersuchung verfeinert werden auf K-lineare $\mathfrak{R}$-Moduln $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$, $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}'$ und diejenigen $\mathfrak{R}$-Isomorphismen unter ihnen, die gleichzeitig K-lineare Abbildungen sind. Hierbei ist K ein in $\mathfrak{R}$ enthaltener Körper.

Ein $\mathfrak{R}$-Isomorphismus B zwischen $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ und $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}'$ bildet das Element $\tilde{\mathfrak{1}} = \mathfrak{1} \bmod \mathfrak{l}$ aus $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ ab auf ein Element $B(\tilde{\mathfrak{1}}) = \beta' \bmod \mathfrak{l}'$ aus $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}'$. Das Bild eines Elementes $\tilde{\varrho}$, $\varrho \in \mathfrak{R}$, ist also $B(\tilde{\varrho}) = B(\varrho \cdot \tilde{\mathfrak{1}}) = \widetilde{\varrho \cdot \beta'} = \varrho : \beta' \bmod \mathfrak{l}'$, insbesondere gilt dabei für die Elemente $\lambda \in \mathfrak{l}$, wegen $\tilde{\lambda} = \tilde{0}$, die Beziehung $\lambda\beta' \in \mathfrak{l}'$, also $\mathfrak{l}\beta' \leqq \mathfrak{l}'$ oder, anders ausgedrückt, $\mathfrak{l} \leqq (\mathfrak{l}' : \beta')$. Natürlich definiert auch umgekehrt, wenn $\mathfrak{l} \leqq (\mathfrak{l}' : \beta')$, also $\mathfrak{l}\beta' \leqq \mathfrak{l}'$ gilt, die Gleichung $B(\tilde{\varrho}) = \varrho\beta' \bmod \mathfrak{l}'$ eine K-homomorphe Abbildung B von $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ in $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}'$. — Diese ist dann und nur dann umkehrbar eindeutig, wenn $\tau\beta' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{l}'}$ nach sich zieht $\tau \in \mathfrak{l}$, d.h., wenn $(\mathfrak{l}' : \beta')$ in $\mathfrak{l}$ liegt. Durch $B(\tilde{\varrho}) = \varrho\beta' \bmod \mathfrak{l}'$ wird also dann und nur dann ein $\mathfrak{R}$-Monomorphismus von $\tilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ auf $B(\tilde{\mathfrak{R}}) \leqq \mathfrak{R} - \mathfrak{l}'$ definiert, wenn $(\mathfrak{l}' : \beta') = \mathfrak{l}$ gilt. Diese Abbildung B ist genau dann ein $\mathfrak{R}$-Isomorphismus von

$\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ auf $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}'$, wenn $1 \bmod \mathfrak{l}'$ als Bild eines Elementes $\tilde{\beta} \in \mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ erscheint, wenn also $B(\tilde{\beta}) = \beta\beta' \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}'}$ erfüllt ist. $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ ist daher dann und nur dann $\mathfrak{R}$-isomorph zu $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}'$, wenn in $\mathfrak{R}$ ein Paar β', β von Elementen existiert für das $\beta\beta' \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}'}$ und $(\mathfrak{l}':\beta') = \mathfrak{l}$ gilt. Vertauscht man in der Bezeichnung $\mathfrak{l}$ mit $\mathfrak{l}'$, so kann man auch sagen: $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}'$ ist genau dann isomorph zu $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$, wenn es eine geeignete Rechtseinheit β modulo $\mathfrak{l}$ gibt, ein Element β also, zu dem ein β' existiert mit $\beta'\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}}$, und das die Gleichung $\mathfrak{l}' = (\mathfrak{l}:\beta)$ erfüllt. — Da schließlich für jedes Linksideal $\mathfrak{l}$ und jedes Element β die Menge $(\mathfrak{l}:\beta)$ ein Linksideal ist, gilt der folgende

SATZ 8. *Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring mit Einselement und $\mathfrak{l}$ ein Linksideal in $\mathfrak{R}$. Dann erhält man alle Linksideale $\mathfrak{l}'$ in $\mathfrak{R}$, für die $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}'$ zueinander $\mathfrak{R}$-isomorph sind in der Form $\mathfrak{l}' = (\mathfrak{l}:\beta)$, wobei β eine Rechtseinheit modulo $\mathfrak{l}$ ist, d. h. die Kongruenz*

$$\beta' \cdot \beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}} \tag{1}$$

lösbar ist. Der Isomorphismus B besteht in der Abbildung

$$\tilde{\varrho} = \varrho \bmod \mathfrak{l} \xrightarrow{B} \varrho\beta' \bmod \mathfrak{l}'. \tag{2}$$

Dabei ergeben β und $\beta_1 \equiv \beta \pmod{\mathfrak{l}}$ dasselbe Linksideal $\mathfrak{l}'$.

Nun sei K ein in $\mathfrak{R}$ enthaltener Körper. Um überhaupt von K-Linearität des $\mathfrak{R}$-Isomorphismus B von $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ auf $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}'$ reden zu können, muß $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ ein K-Rechtsmodul sein, also $\mathfrak{l}K$ in $\mathfrak{l}$ liegen. Analog $\mathfrak{l}'K \subseteq \mathfrak{l}'$. Die in (2) definierte Abbildung B ist dann nur dann K-linear, wenn für alle $\varkappa \in K$ und $\varrho \in \mathfrak{R}$ gilt $B(\tilde{\varrho} \cdot \varkappa) = B(\tilde{\varrho}) \cdot \varkappa$, d. h. $\varrho\varkappa\beta' \equiv \varrho\beta'\varkappa \pmod{\mathfrak{l}'}$, also, wegen $1 \in \mathfrak{R}$, wenn $\varkappa\beta' \equiv \beta'\varkappa \pmod{\mathfrak{l}'}$ erfüllt ist. Nun ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung B dann und und nur dann K-linear, wenn auch ihre Umkehrung K-linear ist. Wegen $\beta'\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}}$, wird diese Umkehrung durch $B'(\tilde{\tilde{\varrho}}) = \varrho\beta \bmod \mathfrak{l}$ gegeben, wobei $\tilde{\tilde{\varrho}}$ die Restklasse von $\varrho \bmod \mathfrak{l}'$ bedeute. Also ist B' und damit auch B dann und nur dann K-linear, wenn

$$\varkappa\beta \equiv \beta\varkappa \pmod{\mathfrak{l}} \text{ für alle } \varkappa \in K \tag{3}$$

gilt. — Sei $\mathfrak{l}$ ein Linksideal in $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{l}K \subseteq \mathfrak{l}$, $\beta'\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}}$ und $\mathfrak{l}'$ durch $\mathfrak{l}' = (\mathfrak{l}:\beta)$ definiert. Es gelte (3). Dann ist auch $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}'$ ein K-Rechtsmodul, d. h. $\mathfrak{l}'K \subseteq \mathfrak{l}'$. Beweis. Sei $\lambda' \in \mathfrak{l}'$, also $\lambda'\beta \in \mathfrak{l}$. Wegen $\mathfrak{l}K \subseteq \mathfrak{l}$, enthält $\mathfrak{l}$ dann auch $\lambda'\beta\varkappa$, also wegen (3), auch $\lambda'\varkappa\beta$, also liegt $\lambda'\varkappa$ in $(\mathfrak{l}:\beta) = \mathfrak{l}'$ für alle $\varkappa \in K$. Hieraus und aus Satz 8 folgt

SATZ 9. *Voraussetzung. Der Ring $\mathfrak{R}$ enthalte den Körper K. Für das Linksideal $\mathfrak{l}$ sei der $\mathfrak{R}$-Linksmodul $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ auch K-Rechtsmodul, also $\mathfrak{l}K \subseteq \mathfrak{l}$.*

Behauptung. Man erhält alle diejenigen Linksideale $\mathfrak{l}'$, für die ein K-linearer $\mathfrak{R}$-Isomorphismus von $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ auf $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}'$ existiert, in der Form $\mathfrak{l}' = (\mathfrak{l}:\beta)$, wobei β diejenigen Rechtseinheiten modulo $\mathfrak{l}$ aus $\mathfrak{R}$ durchläuft, für die

$$\varkappa\beta \equiv \beta\varkappa \pmod{\mathfrak{l}} \quad \text{für alle } \varkappa \in K \tag{3}$$

erfüllt ist. Der Isomorphismus ist dabei die in Satz 8 genannte Abbildung (2).

Mit Hilfe der Sätze 8 und 9 läßt sich nun ein Ring $\mathfrak{R}$ angeben mit zwei zueinander nicht isomorphen, wohl aber $\mathfrak{R}$ distributiv darstellenden Moduln.

Beispiel 3. K sei ein kommutativer Körper. Der Ring $\mathfrak{R}$ bestehe aus denjenigen K-linearen Abbildungen des vierdimensionalen Vektorraumes R_4 über K in sich, die sich durch die Matrizen

$$\zeta = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_5 & x_7 \\ 0 & x_1 & x_3 & x_6 \\ 0 & 0 & x_1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

beschreiben lassen. Der Exponent e des Radikales dieses vollständig primären Ringes ist 4 und damit gleich der verbandstheoretischen Länge $l(V(\mathfrak{m}))$ des $\mathfrak{R}$-Moduls $\mathfrak{m}=R_4$. Nach Satz 1 stellt daher $\mathfrak{m}=R_4$ den Ring $\mathfrak{R}$ distributiv dar. Andererseits rechnet man leicht nach, daß auch die Zuordnung

$$\zeta \to \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_5, & x_3+x_7 \\ 0 & x_1, & x_3, & x_6 \\ 0 & 0 & x_1, & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

eine treue und wegen $l=4$ distributive Darstellung von $\mathfrak{R}$ liefert. Dabei gehören zu den Darstellungen (4) und (5) von $\mathfrak{R}$ die Linksideale $\mathfrak{l}=\{\lambda\}$ bzw. $\mathfrak{l}''=\{\lambda''\}$, wobei λ und λ'' die Matrizen

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_5 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \lambda'' = \begin{pmatrix} 0 & x_2, & x_5, & -x_3 \\ 0 & 0 & x_3, & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

durchlaufen. Da K im Zentrum von $\mathfrak{R}$ liegt, ist (3) für alle $\beta \in \mathfrak{R}$ erfüllt. Die Bedingung (1) für β ist dann und nur dann erfüllt, wenn unter den Matrixelementen $x_i=b_i$ der Matrix (4) von β das Matrixelement $b_1 \neq 0$, also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b_1=1$ ist. In diesem Fall besteht $\mathfrak{l}'=(\mathfrak{l}:\beta)$ aus den Matrizen

$$\lambda' = \begin{pmatrix} 0 & x_2, & x_5, & -x_2 b_6 - x_5 b_4 \\ 0 & 0 & x_3, & -x_3 b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad x_i \in K. \tag{7}$$

Nach Satz 9 ergibt sich also jeder zu $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ isomorphe $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}'$, wenn man in den das Linksideal $\mathfrak{l}'$ bildenden Matrizen (7) die Körperelemente b_4 und b_6 passend festlegt. Jedoch ist es offenbar unmöglich, b_4 und b_6 so zu wählen, daß die das Linksideal $\mathfrak{l}''$ bildenden Matrizen λ'' aus (6) ebenfalls die Gestalt (7) aufweisen, also sind $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}''$ sicher nicht zueinander $\mathfrak{R}$-isomorph, obwohl sie beide den Ring $\mathfrak{R}$ distributiv darstellen q.e.d.

Man könnte vielleicht glauben, daß das Beispiel 3 deshalb überflüssig sei, weil man nach R. M. Thrall [1] bereits weiß, daß eine Algebra bis auf Isomorphie dann und nur dann genau eine treue minimale Darstellung besitzt,

wenn jedes primitive Linksideal und jedes primitive Rechtsideal in ihr dominant oder schwach subordiniert ist, — eine Bedingung, die in einer vollständig primären Algebra $\mathfrak{R}$ endlichen Ranges über einem kommutativen Körper K dann und nur dann erfüllt ist, wenn $\mathfrak{R}$ der Ring $K+\omega K+\cdots+\omega^{e-1}K$, $\omega^e=0$ ist, — und weil andererseits nach Satz 1 ,(10), (11), $\mathfrak{R}-1$ den Ring $\mathfrak{R}$ dann und nur dann distributiv darstellt, wenn die verbandstheoretische Länge des treuen Moduls $\mathfrak{R}-1$ gleich e, also kürzestmöglich ist. Hierbei ist aber zu beachten, daß der Ausdruck ,,minimal" bei THRALL eine andere Bedeutung hat, die sich darauf bezieht, daß man im Darstellungsmodul $\mathfrak{m}$ keinen $\mathfrak{R}$-direkten Summanden fortlassen kann, ohne daß die Treue verlorengeht.

2. $\mathfrak{R}$ sei ein Ring mit Einselement und n eine natürliche Zahl. Der volle Matrizenring $\mathfrak{R}_n$ über $\mathfrak{R}$ besteht aus den Elementen

$$\sum_{1\leq i,k\leq n} C_{ik}\varrho_{ik},$$

wobei die C_{ik} ein System von Matrixeinheiten und die ϱ_{ik} dem Ring $\mathfrak{R}$ entnommen sind. $\mathfrak{R}_n$ enthält die Menge der Elemente $\sum C_{i1}\varrho_{i1}$ als Linksideal $\mathfrak{L}$. Sei $\mathfrak{m}$ ein unitaler $\mathfrak{R}$-Linksmodul und $\mathfrak{M}=\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{m}$ das Kronecker-Produkt von $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{m}$. $\mathfrak{M}$ besteht aus den Elementen $\sum C_{i1}\times m_i$, wobei die m_i die Elemente aus $\mathfrak{m}$ durchlaufen.

a) $\mathfrak{M}$ ist dann und nur dann ein treuer $\mathfrak{R}_n$-Modul, wenn $\mathfrak{m}$ ein treuer $\mathfrak{R}$-Modul ist. Beweis. 1. Sei $\mathfrak{m}$ treu und $\mathsf{P}=\sum C_{ik}\varrho_{ik}\neq 0$, also etwa $\varrho_{jr}\neq 0$. Dann existiert ein $m\in\mathfrak{m}$ mit $\varrho_{jr}m\neq 0$. Das Produkt von P mit dem Element $\mathsf{M}=C_{r1}\times m$ ist dann $\sum C_{i1}\varrho_{ir}\times m=\sum C_{i1}\times\varrho_{ir}m\neq 0$, also ist $\mathfrak{M}$ treu. 2. Sei $\mathfrak{m}$ nicht treu und etwa $\varrho\,\mathfrak{m}=0$. Dann ist auch $C_{11}\,\varrho\,\mathfrak{M}=\{C_{11}\times\varrho m_1;\ m_1\in\mathfrak{m}\}=0$.
b) Der Verband der $\mathfrak{R}_n$-Untermoduln von $\mathfrak{M}$ ist verbandsisomorph zu dem Verband der $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$. Beweis. Sei $\mathfrak{u}$ ein $\mathfrak{R}$-Untermodul von $\mathfrak{m}$. Dann ist $\mathfrak{U}=\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{u}$ ein $\mathfrak{R}_n$-Untermodul von $\mathfrak{M}$. Sei umgekehrt $\mathfrak{V}$ ein $\mathfrak{R}_n$-Untermodul von $\mathfrak{M}$. Dann ist die Menge

$$\text{(8)}\qquad \mathfrak{v}=\left\{\begin{array}{c} m;\ m\in\mathfrak{m},\ C_{11}\times m+C_{21}\times m_2+\cdots+C_{n1}\times m_n\in\mathfrak{V} \\ \text{für geeignete } m_2,\ldots,m_n\in\mathfrak{m}\end{array}\right\}$$

ein $\mathfrak{R}$-Untermodul von $\mathfrak{m}$. Statt durch (8) läßt sich $\mathfrak{v}$ auch definieren durch

$$\text{(9)}\qquad \mathfrak{v}=\left\{\begin{array}{c} m;\ m=m_{i1} \text{ für mindestens ein } i \text{ in einem Element} \\ \sum C_{i1}\times m_{i1}\in\mathfrak{V}\end{array}\right\}.$$

Denn wenn etwa $m=m_{j1}$ ist, enthält $\mathfrak{V}$ auch $C_{1j}\sum C_{i1}\times m_{i1}=C_{11}\times m_{j1}=C_{11}\times m$. Aus (9) folgt ohne weiteres die Beziehung $\mathfrak{u}\to\mathfrak{U}\to\mathfrak{u}$. Es gilt aber auch $\mathfrak{V}\to\mathfrak{v}\to\mathfrak{V}$, denn einerseits ist $\mathfrak{V}\subseteq\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{v}$ nach (9) klar, und andererseits folgt aus $m^{(1)},\ldots,m^{(n)}\in\mathfrak{v}$ die Existenz von Elementen $\mathsf{M}^{(j)}=C_{11}\times m^{(j)}+C_{21}\times m_2^{(j)}+\cdots+C_{n1}\times m_n^{(j)}\in\mathfrak{V}$ für $j=1,\ldots,n$, also enthält $\mathfrak{V}$ auch $C_{11}\times m^{(j)}=C_{11}\mathsf{M}^{(j)}$, also auch $\sum C_{j1}\times m^{(j)}=\sum C_{j1}\mathsf{M}^{(j)}$, also ganz $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{v}$. Natürlich ist für zwei $\mathfrak{R}$-Untermoduln $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{m}$ die Relation $\mathfrak{u}\subseteq\mathfrak{v}$ äquivalent mit $\mathfrak{U}\subseteq\mathfrak{V}$. Die Abbildung $\mathfrak{u}\to\mathfrak{U}$ erweist sich damit als Halbordnungsisomorphismus des Verbandes der $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$ auf den Verband der $\mathfrak{R}_n$-Untermoduln

von $\mathfrak{M}$, also als ein Verbandsisomorphismus. c) Sei $\mathfrak{R}$ ein $\mathfrak{R}_n$ distributiv darstellender Modul. Der Unterring $\mathfrak{R}' = C_{11}\mathfrak{R}_n C_{11}$ ist ringisomorph zu $\mathfrak{R}$. Dann ist $\mathfrak{n} = C_{11}\mathfrak{R}$ ein ebenfalls treuer $\mathfrak{R}'$-Modul. Daraus folgt, wie unter b) gezeigt, daß $\mathfrak{M} = \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{n}$ ein treuer $\mathfrak{R}'_n$-Modul ist, wobei $\mathfrak{R}'_n$ ringisomorph zu $\mathfrak{R}_n$ ist. Weil $\mathfrak{n} = C_{11}\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$ liegt, ist $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{n} = \mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{R}'_n$-Untermodul von $\mathfrak{R}$. Da der Verband der $\mathfrak{R}_n$-Untermoduln von $\mathfrak{R}$ nach Voraussetzung distributiv ist, ist es auch der Unterverband der bereits in $\mathfrak{M}$ enthaltenen $\mathfrak{R}'_n$-Untermoduln von $\mathfrak{R}$. Wie unter b) gezeigt, ist dieser Verband verbandsisomorph zum Verband der $\mathfrak{R}'$-Untermoduln von $\mathfrak{n}$, also wird $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{n}$ distributiv dargestellt. Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 10. *$\mathfrak{R}$ sei ein Ring mit Einselement und n eine natürliche Zahl. $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann distributiv darstellbar, wenn der volle Matrizenring $\mathfrak{R}_n$ über $\mathfrak{R}$ es ist.*

Korollar zu Satz 10. *Ein primärer Ring $\mathfrak{R}$ ist voller Matrizenring $\mathfrak{B}_n$ über einem vollständig primären Ring $\mathfrak{B}$. Der Ring $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann distributiv darstellbar, wenn $\mathfrak{B}$ es ist.*

Beweis. Jacobson [4], Kap. III, § 10, nennt $\mathfrak{R}$ primär, wenn $\mathfrak{R}$ ein Einselement besitzt und der einfache Ring $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$ der Minimalbedingung für Linksideale genügt. Unter dieser Voraussetzung zeigt er, daß $\mathfrak{R} = \mathfrak{B}_n$ mit vollständig primärem Ring $\mathfrak{B}$ gilt.

3. Der Ring $\mathfrak{S}$ mit Einselement sei im ringtheoretischen Sinne die direkte Summe der Ringe $\mathfrak{R}_i$,

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{R}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_q. \tag{10}$$

Dabei sei $1 = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_q$. Der $\mathfrak{S}$-Modul $\mathfrak{m}$ stelle $\mathfrak{S}$ distributiv dar. Dann stellt für $i = 1, \ldots, q$ der Modul $\varepsilon_i \mathfrak{m}$ den Ring $\mathfrak{R}_i$ distributiv dar. Beweis. $\varepsilon_i \mathfrak{m}$ ist ein treuer $\mathfrak{R}_i$-Modul. Da die Summe (10) direkt ist, ist jeder $\mathfrak{R}_i$-Untermodul von $\varepsilon_i \mathfrak{m}$ ein $\mathfrak{R}$-Untermodul von $\mathfrak{m}$. Aus der Distributivität des Verbandes $V(\mathfrak{m})$ aller $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$ folgt insbesondere die Distributivität des Unterverbandes derjenigen $\mathfrak{R}$-Moduln, die in $\varepsilon_i \mathfrak{m}$ enthalten sind. Also ist der Verband $V_i(\varepsilon_i \mathfrak{m})$ der $\mathfrak{R}_i$-Untermoduln von $\varepsilon_i \mathfrak{m}$ distributiv.

Seien nun umgekehrt die Ringe $\mathfrak{R}_i$, $i = 1, \ldots, q$, durch die $\mathfrak{R}_i$-Moduln $\mathfrak{m}_i$ distributiv dargestellt. Sei $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_q$ die direkte Summe der Ringe $\mathfrak{R}_i$ und

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_q \tag{11}$$

die direkte Summe der $\mathfrak{m}_i$. Durch die Definition

$$\sigma m = (\varrho_1 m_1, \ldots, \varrho_q m_q) \quad \text{für } m = (m_1, \ldots, m_q) \in \mathfrak{m} \text{ und } \sigma = (\varrho_1, \ldots, \varrho_q) \in \mathfrak{S} \tag{12}$$

wird $\mathfrak{m}$ ein $\mathfrak{S}$-Modul, der den Ring $\mathfrak{S}$ distributiv darstellt. Beweis. $\mathfrak{m}$ ist natürlich treu. Wegen (12) ist jeder $\mathfrak{R}_i$-Untermodul von $\mathfrak{m}_i$ ein $\mathfrak{S}$-Untermodul von $\mathfrak{m}$ und der Verband $V(\mathfrak{m})$ der $\mathfrak{S}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$ das direkte Produkt der Verbände $V_i(\mathfrak{m}_i)$ der $\mathfrak{R}_i$-Untermoduln von $\mathfrak{m}_i$. Da nach Voraussetzung alle $V_i(\mathfrak{m}_i)$ distributiv sind, ist es auch $V(\mathfrak{m})$. Dies zeigt die Richtigkeit des folgenden

SATZ 11. *Voraussetzung. Der Ring* $\mathfrak{S}$ *mit Einselement sei im ringtheoretischen Sinne die direkte Summe der Ringe* $\mathfrak{R}_i$. *Behauptung.* $\mathfrak{S}$ *ist dann und nur dann distributiv darstellbar, wenn alle* $\mathfrak{R}_i$ *es sind. Die distributiven* $\mathfrak{S}$*-Moduln sind die direkten Summen der distributiven* $\mathfrak{R}_i$*-Moduln.*

KOROLLAR ZU SATZ 11. $\mathfrak{S}$ *sei direkte Summe der primären Ringe* $\mathfrak{R}_i$. *Der Ring* $\mathfrak{S}$ *ist dann und nur dann distributiv darstellbar, wenn diejenigen vollständig primären Ringe, über denen die* $\mathfrak{R}_i$ *volle Matrizenringe sind, distributiv darstellbar sind.*

Ein halbprimärer Ring $\mathfrak{R}$ läßt sich nach § 1, (4) in der Form

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_q + \mathfrak{N} \tag{13}$$

schreiben, wobei die $\mathfrak{R}_i$ primäre Ringe und $\mathfrak{N}$ eine additive Gruppe aus dem Radikal von $\mathfrak{R}$ ist. Wegen der Orthogonalität der Idempotente ε_i in $\mathfrak{R}_i = \varepsilon_i \mathfrak{R} \varepsilon_i$ ist die Summe der $\mathfrak{R}_i$ in (13) im ringtheoretischen Sinne direkt, also enthält $\mathfrak{R}$ den Ring

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{R}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_q \tag{14}$$

als Unterring. Nach § 1 stellt der treue $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{m}$ dann und nur dann den Ring $\mathfrak{R}$ distributiv dar, wenn die Moduln $\varepsilon_i \mathfrak{m}$ die primären Ringe $\mathfrak{R}_i$ distributiv darstellen, also nach Satz 11, wenn $\mathfrak{m} = \varepsilon_1 \mathfrak{m} + \cdots + \varepsilon_q \mathfrak{m}$ die Summe $\mathfrak{S}$ distributiv darstellt. Mit anderen Worten:

SATZ 12. $\mathfrak{m}$ *sei ein treuer* $\mathfrak{R}$*-Modul und* $\mathfrak{R}$ *ein Ring mit Einselement und Minimalbedingung für Linksideale. Mit den Bezeichnungen aus* (13) *und* (14) *stellt* $\mathfrak{m}$ *dann und nur dann* $\mathfrak{R}$ *distributiv dar, wenn* $\mathfrak{m}$ *die direkte Summe* $\mathfrak{S}$ *distributiv darstellt.*

Zumindest notwendig für die distributive Darstellbarkeit von $\mathfrak{R}$ ist also die von $\mathfrak{S}$. Die Frage, ob dies auch hinreicht, ist noch nicht beantwortet. Der Ring $\mathfrak{S}$ ist nach JACOBSON [*1*], Kap. III, § 10, bis auf Isomorphie eindeutig durch $\mathfrak{R}$ bestimmt. Die bei den Aufspaltungen (13) von $\mathfrak{R}$ auftretenden primären Ringe $\mathfrak{R}_i$ lassen sich nach BEHRENS [*1*], Satz 5, als diejenigen durch ein Idempotent ε in der Form $\varepsilon \mathfrak{R} \varepsilon$ darstellbaren Unterringe von $\mathfrak{R}$ charakterisieren, die maximal sind in der Menge aller durch ihr Einselement ζ in der Form $\zeta \mathfrak{R} \zeta$ darstellbaren primären Unterringe von $\mathfrak{R}$. Diese primären Ringe $\varepsilon \mathfrak{R} \varepsilon$ sind ringisomorph vollen Matrizenringen $\mathfrak{B}_a$ über vollständig primären Ringen $\mathfrak{B}$. Nach JACOBSON [*1*] Kap. III, § 10, lassen sich die dabei auftretenden $\mathfrak{B}$ als diejenigen Unterringe $\eta \mathfrak{R} \eta$ von $\mathfrak{R}$ charakterisieren, deren Idempotent η vollständig primitiv ist, also diejenigen, für die das zugehörige Linksideal $\mathfrak{R}\eta$ unzerlegbar ist. Daher gilt nach Satz 12 und dem Korollar zu Satz 11 der folgende

SATZ 13. *Notwendig für die distributive Darstellbarkeit des halbprimären Ringes* $\mathfrak{R}$ *ist, daß für jedes Idempotent* η, *für das das Linksideal* $\mathfrak{R}\eta$ *unzerlegbar ist, der (vollständig primäre) Ring* $\eta \mathfrak{R} \eta$ *sich distributiv darstellen läßt.*

4. Die Frage, ob mit $\mathfrak{R}$ auch jedes Ideal $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{R}$, aufgefaßt als Ring, distributiv darstellbar ist, bietet solange kein Interesse, wie die distributive Darstellbarkeit nur für Ringe mit Einselement definiert ist, weil nämlich aus der Existenz

eines Einselementes η im Ring $\mathfrak{A}$ die Beziehungen $\mathfrak{A}=\mathfrak{R}\mathfrak{A}\supseteq\mathfrak{R}\eta\supseteq\mathfrak{A}\eta=\mathfrak{A}$, also $\mathfrak{A}=\eta\mathfrak{R}\eta$, also $\mathfrak{R}=\mathfrak{A}\oplus(1-\eta)\mathfrak{R}(1-\eta)$ folgen und man auf diese ringdirekte Summe den Satz 11 anwenden kann.

5. Ein homomorphes Bild eines distributiv darstellbaren Ringes ist im allgemeinen nicht mehr distributiv darstellbar. So wird z.B. der Ring aller Matrizen

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_4 \\ 0 & t_1 & t_3 \\ 0 & 0 & t_1 \end{pmatrix}, \qquad t_i \in K,$$

durch den dreidimensionalen Vektorraum $\mathfrak{m}=R_3$ distributiv dargestellt, er enthält das Ideal $\mathfrak{A}$ derjenigen Matrizen, für die nur $t_4\neq 0$ ist. Der Faktorring $\mathfrak{R}/\mathfrak{A}$ ist jedoch nicht distributiv darstellbar, da er zu dem in § 1, Beispiel 1, genannten Ring isomorph ist.

6. Schließlich sei noch auf die Frage nach einer zu der distributiven Darstellbarkeit gehörenden Radikalbildung eingegangen. Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring mit Einselement, dessen Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$ nach seinem Radikal $\mathfrak{W}$ der Minimalbedingung für Linksideale genügt, der also im Sinne von JACOBSON [1], Kap. III, § 9, halbprimär ist. Ein einfacher derartiger Ring $\mathfrak{R}$ wird durch jedes seiner maximalen Linksideale distributiv dargestellt, also auch ein halbeinfacher Ring nach Satz 11, da dieser direkte Summe einfacher Ringe ist. Sei $\mathfrak{m}$ ein $\mathfrak{R}$-Linksmodul mit distributivem $\mathfrak{R}$-Untermodulverband $V(\mathfrak{m})$. Der Kern von $\mathfrak{m}$ besteht aus denjenigen Elementen aus $\mathfrak{R}$, die von $\mathfrak{m}$ annulliert werden, also aus dem Ideal $(0:\mathfrak{m})=\{\tau;\ \tau\mathfrak{m}=0\}$. Der Faktorring $\mathfrak{R}/(0:\mathfrak{m})$ wird durch $\mathfrak{m}$ treu dargestellt.

DEFINITION.

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{R})=\bigcap_{V(\mathfrak{m})\text{ distributiv}}(0:\mathfrak{m}). \tag{15}$$

Da der Nullmodul $\mathfrak{R}$ distributiv darstellt, tritt in (15) mindestens ein $\mathfrak{m}$ wirklich auf. Genauer gilt sogar

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{R})\subseteq\mathfrak{W}(\mathfrak{R}), \tag{16}$$

denn $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}(\mathfrak{R})$ ist als halbeinfacher Ring distributiv darstellbar, d.h. es existiert ein treuer $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}(\mathfrak{R})$-Modul mit distributivem Untermodulverband, also gilt gemäß der Definition (15) die Relation (16). — Jedes $\mathfrak{m}$ aus (15) stellt auf Grund der Definition von $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$ den Faktorring $\mathfrak{R}/(0:\mathfrak{m})$ distributiv dar. $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})=0$ ist demnach damit äquivalent, daß $\mathfrak{R}$ eine subdirekte Summe von distributiv darstellbaren Ringen ist oder, anders ausgedrückt, daß eine treue Familie von $\mathfrak{R}$-Moduln mit distributiven $\mathfrak{R}$-Untermodulverbänden existiert. Dabei soll der Ausdruck „treue Familie" bedeuten, daß zu jedem $\varrho\in\mathfrak{R}$ mindestens ein Modul $\mathfrak{m}$ aus der Familie existiert, für den $\varrho\mathfrak{m}\neq 0$ ist.

Mit den üblichen Radikaldefinitionen hat $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$ noch die folgende Eigenschaft gemeinsam:

$$\mathfrak{D}\left(\mathfrak{R}/\mathfrak{D}(\mathfrak{R})\right)=0. \tag{17}$$

Beweis. Sei $\mathfrak{m}$ ein $\mathfrak{R}$-Modul mit distributivem $V(\mathfrak{m})$. Definitionsgemäß liegt $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$ in $(0:\mathfrak{m})$. Also ist $\mathfrak{m}$ ein $\tilde{\mathfrak{R}}$-Modul mit distributivem Untermodulverband, wobei $\tilde{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$ gesetzt ist. Hieraus folgt $\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{R}}) \leqq \widetilde{\bigcap(0:\mathfrak{m})} = \widetilde{\mathfrak{D}(\mathfrak{R})} = \tilde{0}$ und damit (17).

SATZ 14. *Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring mit Einselement, und die Minimalbedingung für die Linksideale in $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$ erfüllt. $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$ sei das in* (15) *definierte Ideal. Dann gelten folgende Behauptungen*:

1. $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}/\mathfrak{D}(\mathfrak{R}))=0$,

2. $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})=0$ *ist äquivalent damit, daß $\mathfrak{R}$ subdirekte Summe von distributiv darstellbaren Ringen ist oder, anders ausgedrückt, daß eine treue Familie von $\mathfrak{R}$-Moduln mit distributiven $\mathfrak{R}$-Untermodulverbänden existiert.*

Das Beispiel 1 aus § 1 zeigt einen Ring mit $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})=0$. Als subdirekt irreduzible, distributiv darstellbare Summanden von $\mathfrak{R}$ kann man dabei die Ringe $K+C_{13}K$ und $K+C_{23}K$ nehmen. Ein Beispiel für einen Ring mit $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})=K\beta\neq 0$ bietet die kommutative, subdirekt irreduzible Algebra $\mathfrak{R}$ über dem Körper K mit der Basis $\varepsilon=1, \gamma_1, \gamma_2, \beta$ und der Multiplikation $\gamma_1\cdot\gamma_2=\beta$, $\gamma_1^2=\gamma_2^2=\beta^2=\gamma_1\beta=\gamma_2\beta=0$.

Das unter Benutzung der $\mathfrak{R}$-Moduln $\mathfrak{m}$ mit distributiven Untermodulverbänden in (15) erklärte Ideal $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$ läßt sich prinzipiell auch im Ring $\mathfrak{R}$ selbst charakterisieren. Nach § 2, Satz 2, ist nämlich jeder in (15) auftretende $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{m}$ zyklisch, also $\mathfrak{R}$-isomorph zu $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$, wobei $\mathfrak{l}$ ein passendes Linksideal in $\mathfrak{R}$ ist. Also muß $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$ sich auch mit Hilfe dieser Linksideale beschreiben lassen. Dies wird durch die Bemerkungen am Ende von § 2 etwas deutlicher. An ihnen sieht man auch, daß jeder den dortigen Voraussetzungen genügende primäre, distributiv und K-linear darstellbare Ring subdirekt irreduzibel ist. Berücksichtigt man also in der Definition (15) von $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$ bei primären Ringen auch noch die K-lineare Darstellbarkeit, und bedenkt man, daß jeder Faktorring eines primären Ringes wieder primär ist, so sieht man, daß für einen primären Ring $\mathfrak{R}$ mit Einselement, der die Minimalbedingung für Linksideale erfüllt, $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})=0$ damit äquivalent ist, daß $\mathfrak{R}$ subdirekte Summe subdirekt irreduzibler, distributiv und K-linear darstellbarer primärer Ringe ist.

Literatur

[1] ARTIN, E., C. J. NESBITT and R. M. THRALL: Rings with minimum condition. Ann. Arbor 1944. — [2] BEHRENS, E.-A.: Eine Charakterisierung der T-Moduln mit distributivem Untermodulverband bei halbprimärem T. Arch. der Math. **8**, 265–273 (1957). — [3] BEHRENS, E.-A.: Sur les anneaux admettant une représentation normale dans un module dont le treillis des sous-modules est distributif. Faculté des Sciences de Paris, Seminaire P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot Année, 1957/58, 17–01. — [4] JACOBSON, N.: Structure of rings. Providence 1956. — [5] THRALL, R. M.: Some generalizations of Quasi-Frobenius algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 173–183 (1948).

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 3. November 1959)

COHN, P. M.
Math. Zeitschr. 73, 433—456 (1960)

On the Free Product of Associative Rings

II. The Case of (Skew) Fields

By

PAUL M. COHN

Introduction

In a recent paper [2] conditions were given under which the free product of a family of associative rings R_ι ($\iota \in I$) with a single amalgamated subring A exists. For brevity a ring R with A as subring (with the same unit-element as R) is called a A-ring. The main result of [2] may then be stated as follows:

Given a family of A-rings R_ι ($\iota \in I$), if each quotient module R_ι/A, regarded as a left A-module, is flat, then the free product P of the R_ι exists and P/A is again left A-flat.

The object of the present paper is a closer study of the structure of free products, especially when the factors R_ι are all (skew) fields[1]). For simplicity we confine ourselves in the main to the case of two factors. Our chief tool is the concept of the *height* of an element, which is somewhat analogous to the *degree* of a polynomial (§ 1). Besides the definition of height, § 1 includes a characterization of flat modules (Theorem 1.2), which is applied in § 2, and a restatement in detail, of sufficient conditions for the existence of free products. These conditions (already implicit in [2]) involve the exactness of certain sequences (*e.g.* by the vanishing of certain Tor groups) and are rather weaker than the general requirement of flatness. For this reason they may prove more often applicable, although we shall not have occasion to use them here.

In § 2 a relation is obtained between the height of the product of two elements and the sum of the heights of the factors (Theorem 2.4). This is not quite as simple as the usual formula for the degrees, partly owing to the fact that whereas a polynomial ring possesses a natural grading, a free product has in general only a filtration. Nevertheless this relation may be used to investigate the conditions under which the free product of two rings has no zero-divisors[2]). To ensure the existence of free products we shall usually assume our rings R_ι to be such that R_ι/A is flat (both as right and as left A-module). For a given A this is always true precisely when A is a regular ring in the sense of v. NEUMANN (*cf.* [2], Theorem 4.7). If the free product of A-rings

[1]) We shall use the term "field" throughout in the sense of an associative but not necessarily commutative division ring. To stress this we occasionally use the prefix "skew".

[2]) By convention we do not reckon zero among the zero-divisors.

is to have no zero-divisors, then certainly Λ cannot have any zero-divisors, and being also regular, Λ must then be a field. Our main result in this direction (Theorem 2.5) is

I. Given any field K, the free product of any family of K-rings without zero-divisors is again without zero-divisors.

Our general aim being to establish all lemmas in the greatest practicable generality, we shall prove an auxiliary result—from which I follows easily—for Λ-rings satisfying a further condition, which holds *e.g.* whenever Λ is a (not necessarily commutative) principal ideal domain (Theorem 2.3). However, the examples given in § 2 show that for suitable Λ the free product of two Λ-rings R_1 and R_2 may well contain zero-divisors, even though R_1 and R_2 do not.

§ 3 is devoted to a study of divisibility in the free product of two fields. If this is to exist, the amalgamated subring must again be a field; hence the results of § 2 may then be applied, in particular the free product has no zero-divisors. We cannot hope for anything like unique factorization because the units do not lie in the centre and so cannot be collected, if the identity of the factor-rings is to be preserved. However some of the steps towards unique factorization can be taken. In particular we can show that

II. In the free product P of two fields R_1 and R_2 (over a common subfield K) (i) *every unit is a product of elements of R_1 and R_2* (*cf. Theorem* 2.6), (ii) *every non-unit can be written as a product of primes*[3]) (*Theorem* 3.1) *and* (iii) *any two elements which have a non-zero common left multiple, also have a highest common right factor, unique to within left multiplication by a unit* (*Theorem* 3.6).

In terms of left ideals, (iii) states that any two principal left ideals with non-zero intersection together generate a principal left ideal. In this form we can partially generalize the result as follows: (iv) *Any finitely generated left ideal of the free product P is a free P-module* (*Theorem* 3.5). Both (iii) and (iv) are proved by a device not unlike the Euclidean algorithm, with degree replaced by height.

In the light of these results it is tempting to conjecture that the free product of two fields can always be embedded in a field, but this seems not to be an easy problem. We merely point out (in § 3) that except possibly in special cases, the free product does not satisfy the Ore condition [4] and so cannot be embedded in a ring of right quotients.

1. Generalities on free products; the notion of height

In what follows all rings are understood to be associative and with a unit-element, denoted by 1. As subrings of a ring R we admit only the rings containing the unit-element of R, and a homomorphism of R into S is understood to map the 1 of R on the 1 of S. Moreover, all modules are unital.

[3]) By a prime we mean a non-unit which cannot be expressed as a product of two non-units.

Let A be an arbitrary ring; we recall [2] that by a A-ring R we mean a ring R with an isomorphism of A into R. This allows us to regard A as a subring of R. If we have a ring R which merely admits a homomorphism $A \to R$, we speak of R as a "A-ring in the wide sense".

For a given ring A, let R_1 and R_2 be two A-rings, and let P be the universal product of R_1 and R_2. We know from [2] that P is always defined (as a A-ring in the wide sense) and that if the free product of R_1 and R_2 exists at all, it coincides with P. In order to restate the conditions obtained in [2] for the existence of the free product of R_1 and R_2 we shall adopt the following convention throughout: For any positive integer ν, R_ν is to mean R_1 if ν is odd and R_2 if ν is even. We also abbreviate the quotient module R_ν/A by $\overline{R}_\nu$. Next we define a filtration on P. By definition, every element of P may be written as the sum of monomials

$$u_1 u_2 \dots u_n, \tag{1.1}$$

where u_ν is the image, under the canonical homomorphism, of an element of R_ν. Let A_n be the set of all sums of such elements (1.1) with n factors ($n = 1, 2, \dots$). Then it is clear that each A_n is a A-bimodule and

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots, \qquad A_i A_j \subseteq A_{i+j}, \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = P.$$

Thus (A_n) is a filtration of P. These modules A_n just correspond to the submodules W_n used in the proof of [2], Theorem 4.4 (*cf.* also [2], Theorem 4.6). Now it follows from [2], Lemmas 4.1 and 4.3 that for the existence of the free product of R_1 and R_2 we require the following sequences to be exact:

$$\operatorname{Tor}(R_1, R_2) \to \operatorname{Tor}(\overline{R}_1, \overline{R}_2) \to 0, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{Tor}(A_n, R_{n+1}) \to \operatorname{Tor}(A_n/A_{n-1}, \overline{R}_{n+1}) \to 0 \qquad (n = 2, 3, \dots). \tag{1.3}$$

If moreover, the sequences

$$\operatorname{Tor}(A_n, R_{n+1}) \to \operatorname{Tor}(A_n, \overline{R}_{n+1}) \to 0 \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{1.4}$$

are exact, then we have also

$$A_n/A_{n-1} \cong R_1 \otimes \overline{R}_2 \otimes \overline{R}_3 \otimes \dots \otimes \overline{R}_n, = P_n \text{ say} \tag{1.5}$$

(*cf.* [2], Theorem 4.6). The result of [2], that the free product of R_1 and R_2 exists and satisfies (1.5) whenever $\overline{R}_1$ and $\overline{R}_2$ are left A-flat is an immediate consequence of (1.2)—(1.4). However it is sometimes useful to have the weaker conditions (1.2)—(1.4) explicitly.

We now assume that our rings R_1 and R_2 satisfy (1.2)—(1.4), so that P is their free product and the filtration (A_n) satisfies (1.5). In particular the canonical homomorphisms of the R_ν into P are now monomorphisms, and so we may without loss of generality regard R_1 and R_2 as subrings of P.

A second filtration (H_n) may be introduced on P by taking H_n (for $n \geqq 1$) to be the set of all sums of monomials of the form (1.1) with n factors, where

u_r belongs to R_1 or R_2. Further we put $H_0=A$, $H_{-1}=0$. Then the H_n are again A-bimodules and

$$0=H_{-1}\subseteq H_0\subseteq H_1\subseteq\dots, \qquad H_iH_j\subseteq H_{i+j}, \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n=P.$$

With each $a\in P$, $a\neq 0$, we associate a non-negative integer $h(a)$, its *height*, by the rule

$$h(a)=n \text{ if and only if } a\in H_n, \quad a\notin H_{n-1}.$$

It is convenient to assign a height to 0 by writing $h(0)=-\infty$.

The filtrations (H_n) and (A_n) of P are related as follows: denote by ϑ_n the natural homomorphism of A_n onto A_n/A_{n-1}, then an element a of P belongs to H_n if and only if either $a\in A_n$, or $a\in A_{n+1}$ and $a\vartheta_{n+1}\in A\otimes\overline{R}_2\otimes\dots\otimes\overline{R}_{n+1}$ [4]). Hence we have the inclusions

$$H_0\subseteq A_1\subseteq H_1\subseteq A_2\subseteq\dots\subseteq H_{n-1}\subseteq A_n\subseteq H_n\subseteq\dots.$$

Furthermore, from the relation between A_n and H_n we obtain the natural isomorphisms

$$A_n/H_{n-1}\cong\overline{R}_1\otimes\overline{R}_2\otimes\dots\otimes\overline{R}_n, \tag{1.6}$$

$$H_n/A_n\cong\overline{R}_2\otimes\overline{R}_3\otimes\dots\otimes\overline{R}_{n+1}, \tag{1.7}$$

and

$$H_n/H_{n-1}\cong\overline{R}_1\otimes\dots\otimes\overline{R}_n\oplus\overline{R}_2\otimes\dots\otimes\overline{R}_{n+1}. \tag{1.8}$$

In fact the existence of a formula of the type (1.8) (save the fact that the sum is direct) follows already from the definition of H_n, and then the directness follows from (1.6) and (1.7), because all the isomorphisms are natural.

If *e.g.* n is even, the first summand on the right of (1.8) ends in $\overline{R}_2$ and the second in $\overline{R}_1$. In this case we shall denote the submodule of H_n corresponding to the first summand on the right of (1.8) by H_n^{12}, and the submodule corresponding to the second summand by H_n^{21}; when $n=0$, $H_0^{12}=H_0^{21}=H_0$ by convention. It is clear that if $H_n^{\mu\nu}$ is defined, then $\mu+\nu+1\equiv 0 \pmod 2$, so that for a given n, each of μ, ν determines the other. Therefore we shall often write simply $H_n^{\cdot 2}$ or $H_n^{1\cdot}$ for H_n^{12} and $H_n^{\cdot 1}$ or $H_n^{2\cdot}$ for H_n^{21}. In case n is odd we can form H_n^{11} and H_n^{22} in the same way, with corresponding abbreviations. The elements of $H_n^{\mu\nu}$ which are of height n (*i.e.* those which correspond to a non-zero element on the right of (1.8)) are also called *pure* of type (μ,ν) or sometimes just "of type $(\mu,.)$" or "of type $(.,\nu)$". As an example, if a is any element of P of positive height n, then we have a decomposition

$$a=a'+a'', \quad \text{where} \quad a'\in H_n^{1\cdot}, \quad a''\in H_n^{2\cdot}. \tag{1.9}$$

Here a' and a'' are not unique, but by (1.8), either is determined up to an element of H_{n-1}.

[4]) Strictly speaking, we mean the image of this module in A_{n+1}/A_n.

Let U be a right Λ-module and V a left Λ-module and consider their tensor product $U \otimes V$ over Λ. In case Λ is a field, $U \otimes V$ has the following well known independence property[5]:

Given any elements $u_i \in U$, $v_i \in V$ $(i=1, \ldots, n)$, if the u_i are linearly independent and if $\sum u_i \otimes v_i = 0$, then $v_i = 0$ $(i=1, \ldots, n)$.

We require a generalization of this property to the case of an arbitrary coefficient ring Λ. First we note

LEMMA 1.1. *Let V be a left Λ-module with generators v_β $(\beta \in B)$ and relations $\sum \lambda_{\alpha\beta} v_\beta = 0$ $(\alpha \in A)$. Further, let U be a right Λ-module and u_β any family of elements of U such that almost all[6] u_β's vanish. If*

$$\sum u_\beta \otimes v_\beta = 0 \quad \text{in } U \otimes V,$$

then there exists a family (a_α) of elements of U, almost all zero, such that

$$u_\beta = \sum a_\alpha \lambda_{\alpha\beta}.$$

This lemma was stated and proved for a finitely presented module V in [2] (Lemma 2.3); the proof in the general case is precisely the same and is therefore omitted. From the lemma it is easy to obtain

THEOREM 1.2. *Let Λ be any ring. Given a right Λ-module U and a left Λ-module V, suppose that U is flat. Then for any relation*

$$\sum u_i \otimes v_i = 0 \qquad (u_i \in U,\ v_i \in V;\ i = 1, \ldots, n) \tag{1.10}$$

there exist non-zero elements $a_h \in U$ $(h=1, \ldots, m)$ and $\lambda_{hi} \in \Lambda$ such that

$$u_i = \sum a_h \lambda_{hi} \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad \sum \lambda_{hi} v_i = 0 \quad (h = 1, \ldots, m). \tag{1.11}$$

To prove the theorem, let V_0 be the submodule of V generated by the v $(i=1, \ldots, n)$ and let a set of defining relations for V_0 be

$$\sum \lambda_{\alpha i} v_i = 0 \quad (\alpha \in A).$$

Since U is flat, the relation (1.10), valid in $U \otimes V$, also holds in $U \otimes V_0$ and by Lemma 1.1 we obtain a family (a_α) of elements of U, almost all zero, such that $u_i = \sum a_\alpha \lambda_{\alpha i}$. If we renumber the non-zero a_α's as $a_1, \ldots, a_m$ and the $\lambda_{\alpha i}$'s accordingly, we obtain (1.11) and the theorem follows.

COROLLARY. *Let Λ, U and V be as in Theorem 1.2. If $u_i \in U$, $v_{ij} \in V$ $(i=1, \ldots, n, j=1, \ldots, p)$ are such that*

$$\sum u_i \otimes v_{ij} = 0 \quad (j = 1, \ldots, p),$$

then there exist $\lambda_{hi} \in \Lambda$, $a_h \in U$ $(h=1, \ldots, m)$ such that

$$u_i = \sum a_h \lambda_{hi}, \qquad \sum \lambda_{hi} v_{ij} = 0.$$

For let W be the free left Z-module on the free generators w_j $(j=1, \ldots, p)$, where Z is the ring of integers, and form $U \otimes_\Lambda V \otimes_Z W$. Then

$$\sum u_i \otimes v_{ij} \otimes w_j = 0;$$

[5]) *Cf., e.g.*, JACOBSON [3], p. 96.

[6]) *i.e.* all but a finite number.

by Theorem 1.2 there exist $a_h \in U$ and $\lambda_{hi} \in \Lambda$ $(h = 1, \ldots, m)$ such that

$$u_i = \sum a_h \lambda_{hi} \quad \text{and} \quad \sum \lambda_{hi} v_{ij} \otimes w_j = 0 \qquad (h = 1, \ldots, m).$$

Since the w's are free generators, we obtain from the last equation

$$\sum \lambda_{hi} v_{ij} = 0 \qquad (h = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, p),$$

which establishes the corollary.

Theorem 1.2 and its corollary have obvious analogues obtained by interchanging left and right, whose enunciation will be left to the reader. We note in passing that the assertion of Theorem 1.2, regarded as a property of U, is characteristic of flat modules, as may be seen by taking V to be free on a single generator and applying exercise 6, chapter VI of CARTAN and EILENBERG [1] (p. 123).

We shall usually wish to apply Theorem 1.2 to one of the summands on the right of (1.8). The following is a typical instance.

Let $u_1, \ldots, u_n$ be any elements of $H_r^{\cdot 1}$, $v_1, \ldots, v_n$ elements of $H_s^{2\cdot}$ and suppose that

$$\sum u_i v_i \equiv 0 \pmod{H_{r+s-1}}.$$

If H_r/H_{r-1} is right flat, then there exist elements a_h of P $(h = 1, \ldots, m)$ of height r and type $(\cdot, 1)$ and $\lambda_{hi} \in \Lambda$ such that

$$u_i \equiv \sum a_h \lambda_{hi} \pmod{H_{r-1}},$$

$$\sum \lambda_{hi} v_i \equiv 0 \pmod{H_{s-1}}.$$

This is a straightforward consequence of Theorem 1.2, obtained by considering the graded ring $\sum (H_n/H_{n-1})$ derived from the filtration (H_n) of P.

A further property of flat modules which will be needed later is easily obtained from Theorem 1.2.

THEOREM 1.3. *Let Λ be a ring without zero-divisors, then any flat Λ-module is torsion-free.*

For let U be a flat right Λ-module and suppose that $u\lambda = 0$ for some $u \in U$, $\lambda \in \Lambda$, where $\lambda \neq 0$. If V is the free left Λ-module on a single free generator v, then $u \otimes \lambda v = u\lambda \otimes v = 0$, hence by Theorem 1.2, there exist $a_i \in U$ and $\alpha_i \in \Lambda$ such that

$$u = \sum a_i \alpha_i \quad \text{and} \quad \alpha_i \lambda v = 0. \tag{1.12}$$

Since V is free on v, we have $\alpha_i \lambda = 0$; it follows that $\alpha_i = 0$, because $\lambda \neq 0$, and hence by (1.12), $u = 0$. This is what we had to prove.

Of course the converse of Theorem 1.3 is false, even for commutative rings, as is seen by taking Λ to be the ring $F[x, y]$ of polynomials in two indeterminates x and y over a commutative field F, and U the submodule of Λ (qua right Λ-module) generated by x and y. Then U is torsion-free but not flat, for in $U \otimes \Lambda$ we have the relation $x \otimes y - y \otimes x = 0$. This is of the form (1.10), but there exist no elements of U and Λ to satisfy (1.11).

2. Zero-divisors in free products

In order to investigate the presence of zero-divisors in a free product we need certain inequalities relating the height of a product of two elements to the sum of the heights of the factors. From the definition of height it is obvious that we always have

$$h(ab) \leqq h(a) + h(b), \tag{2.1}$$

but of course equality need not hold in (2.1). Two obvious cases of inequality arise when a and b have positive height and (i) a is of type $(., \nu)$ and b of type $(\nu, .)$ ($\nu = 1$ or 2), or (ii) if a is a product of invertible elements from R_1 or R_2 and b is the inverse of a. Theorems 2.1 and 2.3 below show to what extent these cases are typical.

We begin by fixing some terminology. Let R be any ring; by a *unit* of R we understand an element u of R which has a two-sided inverse in R. We note that in a ring without zero-divisors any one-sided inverse is necessarily a two-sided inverse. For the ring consisting of 0 alone this is obvious; otherwise $1 \neq 0$ and if $uv = 1$, then $u \neq 0$, hence $u(vu - 1) = uvu - u = 0$ and so $vu = 1$.

Now let P be the free product of rings R_1 and R_2. A *monomial unit* in P is a unit which can be expressed as a monomial (1.1). Later we shall see that in many cases these are the only units in P (Theorem 2.6). Two elements a and b of P are said to be

(2.2) associated, if $a = ubv$,

(2.3) left associated, if $a = ub$,

(2.4) right associated, if $a = bv$,

for some monomial units u, v of P. Clearly each of these relations is reflexive, symmetric and transitive. If an element a of P is left associated to an element a_0 of lower height than a, then a is said to be *left reducible*; otherwise a is called *left irreducible*. Given any non-zero element a of P, we can find an element a_0 which is left associated to a and is left irreducible. Moreover, a_0 is determined up to left multiplication by a unit of R_1 or R_2 if it is pure of type $(1, .)$ or $(2, .)$ respectively, and up to left multiplication by a unit of Λ if it is not pure. With a corresponding definition of right irreducible and of irreducible elements, similar results hold. The statement of these, as well as the proofs, may be left to the reader.

THEOREM 2.1. *Let Λ be a ring without zero-divisors and R_ν ($\nu = 1, 2$) any Λ-rings such that $\overline{R}_\nu$ ($= R_\nu/\Lambda$) is left flat and right flat, so that their free product P is certainly defined. If a and b are elements of P of positive heights r and s respectively, then ab is of height $r+s$, unless a is pure of type $(., \nu)$ and b is pure of type $(\nu, .)$ ($\nu = 1$ or 2).*

Proof. We noted already that $h(ab)$ does not exceed $r+s$. Suppose then that $h(ab) < r+s$, or in other words,

$$ab \equiv 0 \pmod{H_{r+s-1}}. \tag{2.5}$$

We may write a in the form $a=a'+a''$, where $a'\in H_r^{\cdot 1}$, $a''\in H_r^{\cdot 2}$. Similarly we write b as $b=b'+b''$, where $b'\in H_s^{1\cdot}$, $b''\in H_s^{2\cdot}$. Then by (2.5),

$$a\,b\equiv a'\,b''+a''\,b'\equiv 0 \pmod{H_{r+s-1}}.$$

Since the two summands are (zero or) pure of different types, we may equate them to zero separately:

$$a'\,b''\equiv a''\,b'\equiv 0 \pmod{H_{r+s-1}}. \tag{2.6}$$

By hypothesis each $\overline{R}_r$ is left and right flat, hence the same holds for the Λ-bimodule H_n/H_{n-1}, for $n=0, 1, \ldots$ (*cf.* [2], Lemma 2.1). Applying Theorem 1.2, we can find elements b_i of height s and type $(2, .)$ and $\lambda_i\in\Lambda$ such that

$$b''\equiv\sum\lambda_i\,b_i \pmod{H_{s-1}},$$
$$a'\,\lambda_i\equiv 0 \pmod{H_{r-1}}.$$

Now H_r/H_{r-1} is right flat and therefore torsion-free (Theorem 1.3), so if $a'\not\equiv 0 \pmod{H_{r-1}}$, then $\lambda_i=0$ for all i, and hence $b''\equiv 0 \pmod{H_{s-1}}$. But then $b'\not\equiv 0 \pmod{H_{s-1}}$, because $h(b)=s$, and applying a similar reasoning to the second congruence of (2.6), we find that $a''\equiv 0 \pmod{H_{r-1}}$. Expressed in terms of a and b this means: if a is not of type $(., 2)$, then a is pure of type $(., 1)$ and b is pure of type $(1, .)$. If a is pure of type $(., 2)$ it is certainly not of type $(., 1)$ and by a similar argument we conclude that b is then of type $(2, .)$. This completes the proof.

In order to deal with the case of a product of pure elements left over by Theorem 2.1 we have to impose a further condition on our rings. We shall consider Λ-rings R satisfying the following condition:

(Φ) *R has no zero-divisors, the quotient $\overline{R}$, qua left Λ-module, is torsion-free and given $a, b, c\in R$, $c\neq 0$, if $ac, bc\in\Lambda$, then there exist $u\in R$ and $\alpha, \beta\in\Lambda$ such that $a=\alpha u$, $b=\beta u$.*

We give some examples of cases for which (Φ) holds:

(i) Let Λ be a ring without zero-divisors and such that any left ideal generated by two elements is principal, *e.g.* Λ might be a principal ideal domain. If R is any Λ-ring without zero-divisors such that $\overline{R}$ is left flat, then R satisfies (Φ).

That $\overline{R}$ is torsion-free follows from Theorem 1.3. Now let $ac=\alpha$, $bc=\beta$, where $c\neq 0$, and suppose that $\Lambda\alpha+\Lambda\beta=\Lambda\delta$; explicitly we have $\alpha=\alpha_1\delta$, $\beta=\beta_1\delta$ and $\delta=\lambda\alpha+\mu\beta$, say. If we put $u=\lambda a+\mu b$, then $uc=(\lambda a+\mu b)c=\lambda\alpha+\mu\beta=\delta$, and $ac=\alpha=\alpha_1\delta=\alpha_1 uc$, $bc=\beta_1 uc$. Since $c\neq 0$, we obtain $a=\alpha_1 u$, $b=\beta_1 u$.

(ii) Let K be a (skew) field, then any K-ring without zero-divisors satisfies (Φ). This is a special case of (i) if we observe that any module over a field is flat.

In practice we shall usually require a (seemingly) stronger form of (Φ):

LEMMA 2.2. *If Λ is a ring without zero-divisors and R any Λ-ring satisfying (Φ), then given $a_i, c\in R$ $(i=1, \ldots, n)$, $c\neq 0$, such that $a_i c\in\Lambda$, there exist $u\in R$ and $\alpha_i\in\Lambda$ such that $a_i=\alpha_i u$.*

The proof proceeds by induction on n, the case $n=1$ being trivial. Let $n>1$ and suppose $a_i c\in\Lambda$, $(i=1,\ldots,n)$ where we may take $a_i\neq 0$, without loss of generality. By the induction hypothesis there exist $\alpha_i'\in\Lambda$ $(i>1)$ and $u'\in R$ such that $a_i=\alpha_i' u'$ $(i>1)$. Thus $a_i c=\alpha_i' u' c\in\Lambda$ $(i>1)$; since $a_i\neq 0$, we have $\alpha_i'\neq 0$ and so $u'c\in\Lambda$ (because $\overline{R}$ is torsion-free). By (Φ) applied to $a_1 c$ and $u'c$, we find $\alpha_1,\beta\in\Lambda$ and $u\in R$ such that $a_1=\alpha_1 u$, $u'=\beta u$ and putting $\alpha_i=\alpha_i'\beta$ $(i>1)$ we obtain the desired result.

THEOREM 2.3. *Let Λ be a ring without zero-divisors, R_ν $(\nu=1,2)$ any Λ-rings such that $\overline{R}_\nu$ $(=R_\nu/\Lambda)$ is left and right flat $(\nu=1,2)$, and moreover, R_1 satisfies condition (Φ). Denote the free product of R_1 and R_2 (which certainly exists) by P. If a and b are any elements of P of positive heights r and s and types $(.,1)$ and $(1,.)$ respectively, then $h(ab)\leqq r+s-1$, with equality holding unless there exists $z\in R_1$ such that $h(zb)<s$ and*

$$a=a_0 z+a^* \qquad (a_0\in H_{r-1}^{\cdot 2},\ a^*\in H_{r-1}^{\cdot 1}).$$

Proof. From the hypothesis it follows that a may be written in the form [7])

$$a=\sum a_i'' x_i' \qquad (a_i''\in H_{r-1}^{\cdot 2},\ x_i'\in R_1).$$

For a is certainly congruent to such an expression (mod H_{r-1}), but any element of H_{r-1} can also be expressed as such a sum. Now it is clear that $h(ab)\leqq r+s-1$; suppose that in fact inequality holds, then we have

$$ab\equiv\sum a_i'' x_i' b\equiv 0 \pmod{H_{r+s-2}}. \tag{2.7}$$

As in Theorem 2.1 we see that H_n/H_{n-1} is left and right flat and by Theorem 1.2 there exist $\mu_{hi}\in\Lambda$ and elements a_h of height $r-1$ and type $(.,2)$ such that

$$a_i''\equiv\sum a_h\mu_{hi} \pmod{H_{r-2}}, \tag{2.8}$$

$$\sum\mu_{hi} x_i' b\equiv 0 \pmod{H_{s-1}} \text{ for all } h. \tag{2.9}$$

The congruences (2.8) may be written as equations thus:

$$a_i''=\sum a_h\mu_{hi}+a_i^* \qquad (a_i^*\in H_{r-2}).$$

If we put $x_h=\sum\mu_{hi}x_i'$, then $x_h\in R_1$ and we have

$$a=\sum a_i'' x_i'=\sum a_h\mu_{hi}x_i'+\sum a_i^* x_i',$$

that is,

$$a=\sum a_h x_h+a^* \qquad (a^*\in H_{r-1}^{\cdot 1}). \tag{2.10}$$

The congruences (2.9) now read

$$x_h b\equiv 0 \pmod{H_{s-1}} \quad \text{for all } h.$$

By symmetry it follows that b may be expressed as

$$b=\sum y_k b_k+b^*, \tag{2.11}$$

[7]) Unless the contrary is stated, each suffix such as i, j, k etc. runs over some finite index set (not necessarily the same for different suffixes).

where b_k is of height $s-1$ and type $(2,.)$, $y_k \in R_1$, $b^* \in H^{1\cdot}_{s-1}$ and moreover, the y_k satisfy

$$x_h y_k \equiv 0 \pmod{H_0} \quad \text{for all } h \text{ and } k. \tag{2.12}$$

We may suppose without loss of generality that no x_k or y_k is zero. Now (2.12), for $k=1$, states that $x_h y_1 \in \Lambda$. Since R_1 satisfies (Φ), there exist $\xi_h \in \Lambda$, $z \in R_1$ such that

$$x_h = \xi_h z. \tag{2.13}$$

Here $\xi_h \neq 0$ because $x_h \neq 0$. Inserting from (2.13) in (2.12) we find that

$$\xi_h z\, y_k \equiv 0 \pmod{H_0},$$

and since H_1/H_0 is torsion-free, we deduce that

$$z\, y_k = \eta_k \in \Lambda. \tag{2.14}$$

By (2.10) and (2.13),

$$\begin{aligned} a &= \sum a_h \xi_h z + a^*, \\ &= a_0 z + a^*, \end{aligned}$$

where $a_0 \in H^{\cdot 2}_{r-1}$, $a^* \in H^{\cdot 1}_{r-1}$, and by (2.11) and (2.14),

$$\begin{aligned} z\, b &= \sum z\, y_k b_k + z\, b^* \\ &= \sum \eta_k b_k + z\, b^* \in H_{s-1}. \end{aligned}$$

This completes the proof.

For reference we state explicitly the special case of Theorems 2.1 and 2.3 when Λ is a field.

THEOREM 2.4. *Let P be the free product of two K-rings R_1 and R_2 without zero-divisors, where K is a (skew) field. If a and b are elements of P of positive heights r and s respectively, then*

(i) *$h(ab)=r+s$, unless a and b are pure of types $(.,\nu)$ and $(\nu,.)$ respectively ($\nu=1$ or 2),*

(ii) *if a and b are pure of types $(.,\nu)$ and $(\nu,.)$ respectively ($\nu=1$ or 2), then $h(ab)=r+s-1$, unless a is right reducible and b is left reducible.*

Assertion (i) follows from Theorem 2.1 by noting that any module over a field is flat, so that all the hypotheses of that theorem are satisfied. Now Theorem 2.3 may be applied since both R_1 and R_2 satisfy (Φ). If $h(ab)<r+s-1$, let a, b be of types $(.,1)$, $(1,.)$ respectively. By Theorem 2.3 there exists $z \in R_1$ such that $a=a_0 z+a^*$ and $h(zb)<s$. Moreover, by (2.14) there exists $y \in R_1$, $y \neq 0$ such that $zy=\eta \in K$. Since $h(a)=r$ while $h(a^*)<r$, we have $z \neq 0$ and so $\eta \neq 0$. We put $x=y\eta^{-1}$, then $zx=1$ and hence z is a unit of R_1. Thus b is left reducible; by symmetry a is also right reducible and the theorem follows.

COROLLARY 1. *Let P be as in Theorem 2.4; given a, b in P, if either a is right irreducible or b is left irreducible, then*

$$h(ab) \geqq h(a) + h(b) - 1.$$

If $h(a)$ and $h(b)$ are both positive this follows directly from part (ii) of the theorem. If one of $h(a)$ and $h(b)$ is zero the assertion holds trivially and likewise if a or b is zero.

COROLLARY 2. *Let P be as in Theorem 2.4 and let $a \in P$ be right irreducible, then*

$$h(ab) \geqq h(a) \quad \text{for any } b \in P,\ b \neq 0.$$

If $h(b) > 0$, this follows from Corollary 1, while if $h(b) = 0$, $b \in K$ and then clearly $h(ab) = h(a)$.

As a further corollary we have

THEOREM 2.5. *If R_ι $(\iota \in I)$ is any family of K-rings without zero-divisors, where K is a field, then their free product has no zero-divisors.*

Consider first the case of two factors. If $a \neq 0$ and $b \neq 0$, let $a = a_0 u$, where a_0 is right irreducible and u is a monomial unit. Then $a_0 \neq 0$, $ub \neq 0$ and so by Theorem 2.4, Cor. 1,

$$h(ab) = h(a_0 ub) \geqq h(a_0) + h(ub) - 1 \geqq -1.$$

Hence $ab \neq 0$; the result for n factors now follows by induction on n, and finally the general case is obtained by taking direct limits and observing that a pair of elements in the free product involve elements from only a finite number of factors.

The following example shows that even when the free product of two rings without zero-divisors exists, it may itself possess zero-divisors.

Let R_1 be the free algebra over a commutative field F on the free generators x_1, x_2, y, put

$$\lambda_\nu = x_\nu y \qquad (\nu = 1, 2)$$

and denote the subalgebra generated by the λ_ν by Λ. Then Λ is free on the λ_ν, as is seen by putting $y = 1$. Now Λ may be regarded as the free product of the polynomial rings $F[\lambda_1]$ and $F[\lambda_2]$ over F; in a similar way we can form $\tilde{\Lambda}$, the free product of the commutative fields of rational functions $F(\lambda_1)$ and $F(\lambda_2)$ over F, and it is clear that Λ may be regarded as a subalgebra of $\tilde{\Lambda}$. Let R_2 be the subalgebra of $\tilde{\Lambda}$ generated by Λ and the element

$$z = \lambda_2 \lambda_1^{-1}.$$

Both R_1 and R_2 are clearly Λ-rings without zero-divisors. We next show that $\overline{R}_1$ and $\overline{R}_2$ are both left flat, so that their free product exists ([2], Theorem 4.4). Suppose then that

$$\sum \mu_i a_i = \mu \qquad \mu, \mu_i \in \Lambda, \qquad a_i \in R_1. \tag{2.15}$$

Now each monomial in the x's and y can be written uniquely as

$$\beta b, \tag{2.16}$$

where β is a monomial in the λ_r and b is a monomial in the x_r and y which does not begin with a factor $x_r y$. Let $b_0=1, b_1, \ldots, b_m$ be the right-hand factors occurring in this way in the different monomials of all the a_i in (2.15). Each such a_i is then of the form

$$a_i=\sum \beta_{ij} b_j, \quad \beta_{ij}\in\Lambda. \tag{2.17}$$

If we can show that

$$\sum \mu_i \beta_{ij}=\begin{cases}\mu & j=0,\\ 0 & j\neq 0,\end{cases}$$

then it will follow that $\overline{R}_1$ is left flat (*cf.* [*1*] ch. VI, ex. 6, p. 123). Now inserting (2.17) in (2.15) we find

$$\sum \mu_i \beta_{ij} b_j=\mu,$$

and so it is enough to show that the b_j are left independent over Λ. If there were a non-trivial relation between the b's with left coefficients in Λ, then since they are monomials in a free algebra, it would follow that two are proportional, say

$$\alpha_1 b_1=\alpha_2 b_2 \quad \alpha_i \text{ monomials in } \Lambda.$$

By the uniqueness of (2.16) we then have $b_1=b_2$, which contradicts the fact that the b_j were distinct. Thus $\overline{R}_1$ is left flat.

Next consider R_2; this is in effect free on z and λ_1, the element λ_2 being given by $\lambda_2=z\lambda_1$. Thus R_2 has a basis consisting of monomials in λ_1, λ_2, z with the proviso that $z\lambda_1$ does not occur. It follows that each monomial of R_2 is unique of the form

$$\beta \text{ or } \beta z b, \tag{2.18}$$

where β is a monomial in Λ and b does not begin with λ_1. Now let

$$\sum \mu_i a_i=\mu, \quad \mu, \mu_i\in\Lambda, \quad a_i\in R_2. \tag{2.19}$$

If $b_0=1, b_1, \ldots, b_m$ are again the right-hand factors occurring in the different monomials of all the a_i, then

$$a_i=\beta_i+\sum \beta_{ij} z b_j, \quad \beta_i, \beta_{ij}\in\Lambda.$$

Inserting this in (2.19), we have

$$\sum \mu_i \beta_i+\sum \mu_i \beta_{ij} z b_j=\mu.$$

By the uniqueness we conclude as before that

$$\sum \mu_i \beta_{ij}=0, \quad \sum \mu_i \beta_i=\mu,$$

and hence $\overline{R}_2$ is left flat.

We can now conclude that the free product P of R_1 and R_2 exists. However in P we have $a = x_2 - z x_1 \neq 0$, $b = y \neq 0$, while $ab = x_2 y - z x_1 y = \lambda_2 - z \lambda_1 = 0$, so that P has zero-divisors.

In the example just given, $\overline{R}_1$ is also right flat, but $\overline{R}_2$ is not. However it is easy to construct Λ-rings R_1, R_2 without zero-divisors such that $\overline{R}_1$ and $\overline{R}_2$ are both left and right flat, and yet their free product has zero-divisors. *E.g.*, take R_1 to be the free algebra over F on the free generators x_1, x_2, y_1, y_2, and Λ the subalgebra generated by the elements

$$\lambda_{\mu\nu} = x_\mu y_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2),$$

then Λ is free on these generators, as is easily verified. Let R_2 be the algebra generated by the elements $\lambda_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2)$ and α, β with the relation

$$\lambda_{11} - \alpha \lambda_{21} - \lambda_{12}\beta + \alpha \lambda_{22}\beta = 0.$$

The subalgebra of R_2 generated by the $\lambda_{\mu\nu}$ is easily seen to be free and hence may be identified with Λ. Moreover, R_1, R_2 have no zero-divisors and $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ are left and right flat, but in their free product we have

$$a = x_1 - \alpha x_2 \neq 0, \qquad b = y_1 - y_2\beta \neq 0, \qquad ab = 0.$$

The proof is similar to that of the previous example and the details may therefore be left to the reader.

Next we consider units in the free product of rings over a field.

THEOREM 2.6. *Let P be the free product of two K-rings without zero-divisors, where K is a field. Then every unit in P is a monomial unit.*

Proof. Let a be a unit of P which is not monomial. If a is reducible it is associated with a unit of lower height which is again not monomial. We may therefore assume without loss of generality that a is irreducible. Let its inverse be b, then $ab = 1$, and by Theorem 2.4, Cor. 2, $h(a) \leqq h(ab) = 0$, which is a contradiction.

By virtue of this theorem we need not longer distinguish between units and monomial units, as we shall for the rest of this paper be dealing only with rings without zero-divisors over a field.

3. Divisibility in the free product of two fields

We now turn to a closer study of the free product of two fields. If R_1 and R_2 are fields and their free product P over a common subring exists, then this subring is given by the intersection $R_1 \cap R_2$ in P and it is therefore again a field. Thus we may assume without loss of generality that R_1 and R_2 are both fields containing a subfield K, and that we are considering the free product P of R_1 and R_2 over K. First we obtain a relation between the number of factors in a product and its height.

THEOREM 3.1. *Let P be the free product of two fields R_1, R_2 over a field K. If an element a of P has positive height r and there is a product representation*

$$a = a_1 a_2 \dots a_n \qquad a_i \in P, \tag{3.1}$$

then the number k of non-units among the a_i does not exceed r.

The proof proceeds by induction on k. For $k=0$ the assertion holds trivially. Now suppose that $k>0$, let a_m $(1\leqq m\leqq n)$ be the first non-unit on the right of (3.1) and write $a=bc$, where

$$b = a_1 a_2 \dots a_m u^{-1}, \tag{3.2}$$

$$c = u\, a_{m+1} \dots a_n, \tag{3.3}$$

the unit u being chosen so that b is right irreducible. Let r, s, t be the heights of a, b, c respectively and suppose that $k>r$. The number of non-units in the representation (3.3) of c is $k-1$ and by the induction hypothesis, $k-1\leqq t$. On the other hand, since $a=bc$ and b is right irreducible we have $r\geqq s+t-1$, whence

$$s+t-1\leqq r\leqq k-1\leqq t,$$

i.e., $s\leqq 1$. Now b cannot be a unit because it contains a non-unit as factor. Hence $s\geqq 1$, i.e. $h(b)=s=1$, and it follows that $r=k-1=s+t-1$. By Theorem 2.4, b must be pure; together with $h(b)=1$ this implies that $b\in R_1$ or $b\in R_2$ and this again contradicts the fact that b is a non-unit. Thus $k\leqq r$ and the proof is complete.

This theorem shows that if we define primes in the obvious way (see footnote [3]), then any non-unit of P can be written as a product of primes. The bound in Theorem 3.1 on the number of factors is actually best possible, as may be seen from the following example: Let $x\in R_1$, $y\in R_2$ and suppose $x, y\notin K$, then $a=x+y$ is of height 1, and by Theorem 2.4, for any b of height s, $h(ab)=s+1$. This shows that a cannot be a unit. Now let $a_i=x_i+y_i$, where $x_i\in R_1$, $y_i\in R_2$, $x_i, y_i\notin K$ $(i=1, \dots, n)$, then again by Theorem 2.4, $h(a_1 a_2 \dots a_n)=n$, so that there are always elements of height n which can be written as the product of n non-unit factors; the only exception is the trivial case where R_1 or R_2 coincides with K.

For the theorems which follow we need a representation of elements of the free product involving sets of residue classes $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k$ of $H_n \pmod{H_{n-1}}$, which are linearly independent when H_n/H_{n-1} is considered as right vector space over K, or as left vector space over K. For convenience we shall usually talk about the elements of H_n themselves, rather than their residue-classes, and we express the above situation by saying that $u_1, \dots, u_k$ are right independent (mod H_{n-1}) or left independent (mod H_{n-1}), leaving the coefficient domain K to be understood. The representation obtained below (Lemma 3.2) is actually valid in the free product of any K-rings (not merely fields).

LEMMA 3.2. *Let P be the free product of two K-rings R_1 and R_2 over a field K. Given an element a of P, of positive height n, an integer r in the range $1\leqq r\leqq n$ and elements a_h of P of height r which are right independent* (mod H_{r-1}), *then there is an expression*

$$a \equiv \sum a_h x_h + \sum a_i' x_i'' + \sum a_j'' x_j' \pmod{H_{r-1}}, \tag{3.4}$$

where $a_i'\in H_r^{\cdot 1}$, $a_j''\in H_r^{\cdot 2}$, $x_h\in H_{n-r}$, $x_i''\in H_{n-r}^{2\cdot}$, $x_j'\in H_{n-r}^{1\cdot}$. Moreover, the a_h, a_i', a_j'' are right independent (mod H_{r-1}) *and the x_i'', x_j' of given height s $(\leqq n-r)$ are*

left independent (mod H_{s-1}); *in particular all the* x_i'', x_j' *are left independent. Finally, if some* x_i'' *or* x_j' *is of height zero, then* (3.4) *may be taken to be an equality and not merely a congruence.*

The proof proceeds by induction on $n-r$. Suppose that for some $s \leqq n-r$, we have a congruence

$$a \equiv \sum a_k x_k + \sum a_i' x_i'' + \sum a_j'' x_j' \pmod{H_{n-s}}, \tag{3.5}$$

where the a's and x's on the right have the heights and types stated in the lemma, the a's are right independent (mod H_{r-1}) and the x's of height s' are left independent (mod $H_{s'-1}$) for $n-r-s<s' \leqq n-r$. For $s=0$ this holds trivially, since $a \equiv 0 \pmod{H_n}$. If $0 \leqq s \leqq n-r$, then b, given by

$$b = a - \sum a_k x_k - \sum a_i' x_i'' - \sum a_j'' x_j'$$

belongs to H_{n-s}, by (3.5). Since $s \leqq n-r$, $n-s \geqq r$ and we may write b in the form

$$b \equiv \sum a_k y_k + \sum a_i' y_i'' + \sum a_j'' y_j' + \sum b_k' z_k'' + \sum b_l'' z_l' \pmod{H_{n-s-1}}, \tag{3.6}$$

where $b_k' \in H_r^{\cdot 1}$, $b_l'' \in H_r^{\cdot 2}$, $y_k \in H_{n-r-s}$, y_i'', $z_k'' \in H_{n-r-s}^{2\cdot}$, and y_j', $z_l' \in H_{n-r-s}^{1\cdot}$. That such a form for b is possible follows from the definition of height. Of all the expressions (3.6) for b we now choose one in which the number of terms in the last two sums on the right is as small as possible. Then a_k, a_i', a_j'', b_k', b_l'' must be right independent (mod H_{r-1}), for if not, then by the independence of the a_k, a_i', a_j'', one of the b's, say b_1', must depend on the remaining a's and b's. Taking the type into account, we thus obtain a relation

$$b_1' \equiv \sum a_k \varkappa_k + \sum a_i' \lambda_i + \sum_{k>1} b_k' \mu_k \pmod{H_{r-1}},$$

where $\varkappa_k$, λ_i, $\mu_k \in K$. Substituting this expression for b_1' into (3.6), we obtain

$$b \equiv \sum a_k (y_k + \varkappa_k z_1'') + \sum a_i' (y_i'' + \lambda_i z_1'') + \sum a_j'' y_j' + \sum_{k>1} b_k' (z_k'' + \mu_k z_1'') + \sum b_l'' z_l' \pmod{H_{n-s-1}}.$$

Thus we have shortened the fourth sum without affecting the fifth, which contradicts the choice of the expression (3.6). Similarly, if one of the b_l'' depended (mod H_{r-1}) on the other b's and the a's, we could shorten the fifth sum in (3.6). Thus we conclude that all the a's and b's on the right of (3.6) are right independent (mod H_{r-1}).

A similar argument now shows that the y's and z's in (3.6) are left independent (mod $H_{n-r-s-1}$), and combining (3.5) and (3.6) we obtain

$$a \equiv \sum a_k (x_k + y_k) + \sum a_i' (x_i'' + y_i'') + \sum a_j'' (x_j' + y_j') + \sum b_k' z_k'' + \sum b_l'' z_l' \pmod{H_{n-s-1}},$$

which is of the form (3.5) with s replaced by $s+1$. The independence properties of the second factors in the sums are easily checked; thus for $s' > n-r-s$

the elements $x_i'' + y_i''$ and $x_j' + y_j'$ of height s' are left independent (mod $H_{s'-1}$) by the induction hypothesis, because

$$x_i'' + y_i'' \equiv x_i'', \quad x_j' + y_j' \equiv x_j' \quad (\text{mod } H_{s'-1}),$$

while for $s' = n - r - s$ we have only the z_k'' and z_l' which are left independent (mod $H_{n-r-s-1}$) by construction.

This completes the proof of the induction step from s to $s+1$, where $s \leqq n-r$. Taking $s = n-r$, we obtain $s+1 = n-r+1$, and $n-(s+1) = r-1$, whence

$$a \equiv \sum a_h x_h + \sum a_i' x_i'' + \sum a_j'' x_j' \quad (\text{mod } H_{r-1}), \tag{3.7}$$

with the independence conditions as stated in the lemma. If some x_i'' in (3.7) is of height zero, say x_1'', then we may without loss of generality take $x_1'' = 1$, by absorbing the scalar factor in a_1', and we can now add the difference between the left and right-hand sides of (3.7) (which belongs to H_{r-1}) to a_1' without affecting the right independence (mod H_{r-1}) of the a_i'. Then (3.7) becomes an equality, and a similar reasoning applies if some x_j' is of height zero. This completes the proof.

In order to apply Lemma 3.2 we need again the independence property of the tensor product. For reference we shall state it here in the precise form in which we shall use it later:

LEMMA 3.3. *Let P be the free product of rings over a field.*

(i) *Given $a_1, \ldots, a_r \in H_m^{\cdot 1}$, $b_1, \ldots, b_r \in H_n^{2\cdot}$, if the a's are right independent* (mod H_{m-1}) *and*

$$\sum a_\varrho b_\varrho \equiv 0 \quad (\text{mod } H_{m+n-1}),$$

then $b_\varrho \equiv 0$ (mod H_{n-1}) ($\varrho = 1, \ldots, r$).

(ii) *Given $a_1, \ldots, a_r \in H_m^{\cdot 1}$, $b_1, \ldots, b_r \in H_n$, if the a's are right independent* (mod H_{m-1}) *and*

$$\sum a_\varrho b_\varrho \equiv 0 \quad (\text{mod } H_{m+n-1}),$$

then $b_\varrho \equiv 0$ (mod $H_n^{1\cdot}$) ($\varrho = 1, \ldots, r$).

Part (i) of the lemma is just a restatement of the independence property. To prove (ii) write

$$b_\varrho = b_\varrho' + b_\varrho'', \quad b_\varrho' \in H_n^{1\cdot}, \quad b_\varrho'' \in H_n^{2\cdot},$$

then

$$\sum a_\varrho b_\varrho'' \equiv \sum a_\varrho b_\varrho \equiv 0 \quad (\text{mod } H_{m+n-1}),$$

hence by (i) $b_\varrho'' \in H_{n-1}$ and so $b_\varrho = b_\varrho' + b_\varrho'' \in H_n^{1\cdot}$, as we had to prove.

We shall also need a somewhat more delicate measure than the height of an element of P. For this purpose we define, for any $a \in P$,

$$\hbar(a) = \begin{cases} 2h(a) + 1 & \text{if } a \text{ is pure,} \\ 2h(a) + 2 & \text{if not.} \end{cases}$$

It is clear that $\hbar(a)<\hbar(b)$ implies $\hbar(a)<\hbar(b)$. More precisely, $\hbar(a)<\hbar(b)$ is equivalent to the assertion "$h(a)<h(b)$ or $h(a)=h(b)$ and a but not b is pure".

LEMMA 3.4. *Let P be the free product of two fields R_1 and R_2 over a field K. Given non-zero elements $a_\varrho, b_\varrho \in P$ $(\varrho=1, \ldots, r)$ such that b_ϱ is left irreducible, $\hbar(b_1)\geqq\hbar(b_\varrho)$, $h(a_\varrho b_\varrho)=N$ for $\varrho=1, \ldots, r$, and moreover,*

$$\sum a_\varrho b_\varrho \equiv 0 \pmod{H_{N-1}}, \tag{3.8}$$

then there exist elements w_ϱ of P $(\varrho=2, \ldots, r)$ such that the element

$$b_1^* = b_1 + \sum w_\varrho b_\varrho \tag{3.9}$$

satisfies

$$\hbar(b_1^*) < \hbar(b_1). \tag{3.10}$$

Proof. If $a_1 \in K$ then we can satisfy (3.9) and (3.10) with $w_\varrho = a_1^{-1} a_\varrho$. We may therefore assume that $h(a_1)>0$. In particular, in view of the left irreducibility of b_1 this implies that $N>0$. For if $N=0$, then $a_1 b_1 \in K$, i.e. b_1 is a unit and $h(a_1)>0$, hence $h(b_1)>0$, which contradicts the fact that b_1 is left irreducible.

We shall put $h(a_1)=m$, $h(b_1)=n$ and $h(a_\varrho)=m_\varrho$, $h(b_\varrho)=n_\varrho$ $(\varrho=2, \ldots, r)$ and distinguish two cases.

(i) $N \neq m+n$.

By Theorem 2.4, $N=m+n-1$ and a_1, b_1 are pure of types $(., 1)$, $(1, .)$ say. Using Lemma 3.2 we obtain a decomposition for a_1:

$$a_1 = \sum a_i'' x_i' + a_1^*, \tag{3.11}$$

where $a_i'' \in H_{m-1}^{\cdot 2}$, $x_i' \in R_1$, $a_1^* \in H_{m-2}$, the a_i'' are right independent (mod H_{m-2}) and the x_i' are left independent. Now we have

$$N = m+n-1 \leqq m_\varrho + n_\varrho,$$

and so

$$m-1 \leqq m_\varrho + n_\varrho - n \leqq m_\varrho \qquad (\varrho=2, \ldots, r).$$

Hence we may apply Lemma 3.2 to $a_2, a_3, \ldots, a_r$ in turn, and obtain the decompositions

$$a_\varrho = \sum a_i'' y_{i\varrho}' + \sum u_j' z_{j\varrho}'' + \sum u_k'' z_{k\varrho}' + a_\varrho^*, \tag{3.12}$$

where $u_j' \in H_{m-1}^{\cdot 1}$, $u_k'' \in H_{m-1}^{\cdot 2}$, $y_{i\varrho}', z_{k\varrho}' \in H_{m_\varrho - m+1}^{1\cdot}$, $z_{j\varrho}'' \in H_{m_\varrho - m+1}^{2\cdot}$, and $a_\varrho^* \in H_{m-2}$; moreover, a_i'', u_j' and u_k'' are right independent (mod H_{m-2}). We also note that if $m_\varrho < m$, then since $m_\varrho + n_\varrho \geqq N = m+n-1$ and $n_\varrho \leqq n$, we must have $m_\varrho = m-1$, $n_\varrho = n$ and $N = m_\varrho + n_\varrho$. By the maximality of $\hbar(b_1)$, b_ϱ is then pure (because b_1 is pure).

Now we have $h(a_\varrho^* b_\varrho) \leqq m-2+n_\varrho \leqq m-2+n = N-1$, for $\varrho=1, \ldots, r$. Hence, inserting (3.11) and (3.12) in (3.8), we obtain

$$\sum a_i'' x_i' b_1 + \sum a_i'' y_{i\varrho}' b_\varrho + \sum u_j' z_{j\varrho}'' b_\varrho + \sum u_k'' z_{k\varrho}' b_\varrho \equiv 0 \pmod{H_{N-1}}. \tag{3.13}$$

Since b_1 is pure of height n and type $(1, .)$, by hypothesis, and $x_i' \in R_1$, it follows that $x_i' b_1 \in H_n^{1\cdot}$. If we can show that

$$\begin{cases} y_{i\varrho}' b_\varrho \equiv z_{k\varrho}' b_\varrho \equiv 0 \pmod{H_n^{1\cdot}} \\ z_{j\varrho}'' b_\varrho \equiv 0 \pmod{H_n^{2\cdot}}, \end{cases} \tag{3.14}$$

then we can apply Lemma 3.3 to equate the coefficients in (3.13). However, (3.14) may not be true for all the terms written; we therefore modify (3.13) by omitting from the left-hand side all terms which belong to H_{N-1}. Clearly this does not affect the truth of (3.13). We now assert that (3.14) holds for all the terms which still occur in (3.13).

Consider a term $y_{i\varrho}' b_\varrho$ and suppose first that $N = m_\varrho + n_\varrho$. We know that $h(y_{i\varrho}') \leqq m_\varrho - m + 1$, hence $h(y_{i\varrho}' b_\varrho) \leqq m_\varrho + n_\varrho - m + 1 = N + 1 - m = n$, i.e. $y_{i\varrho}' b_\varrho \in H_n$. If $h(y_{i\varrho}' b_\varrho)$ is exactly n, then $h(y_{i\varrho}') = m_\varrho - m + 1$. When this is positive, $y_{i\varrho}' b_\varrho$ must be pure of type $(1, .)$; thus $y_{i\varrho}' b_\varrho \in H_n^{1\cdot}$ and this still holds (trivially) if $h(y_{i\varrho}' b_\varrho) < n$. If $m_\varrho = m - 1$, then b_ϱ must be pure of type $(\nu, .)$ say, and height n; in case $\nu = 1$, we have $y_{i\varrho}' b_\varrho \in H_n^{1\cdot}$ as before, while if $\nu = 2$, then $y_{i\varrho}' b_\varrho \in H_n^{2\cdot}$ and so $a_i'' y_{i\varrho}' b_\varrho \in H_{N-1}$, so that the term does not occur in (3.13).

Next suppose that $N \neq m_\varrho + n_\varrho$. Then by Theorem 2.4, $m_\varrho + n_\varrho = N + 1$ and a_ϱ, b_ϱ are pure of types $(., \nu)$, $(\nu, .)$ respectively ($\nu = 1$ or 2); moreover, $m_\varrho \geqq m$ in this case. By (3.12), *either* $y_{i\varrho}'$ is pure of height $m_\varrho - m + 1$ and type $(1, \nu)$, in which case $h(y_{i\varrho}' b_\varrho) = m_\varrho - m + 1 + n_\varrho - 1 = N + 1 - m = n$, and we deduce as before that $y_{i\varrho}' b_\varrho \in H_n^{1\cdot}$, *or* $h(y_{i\varrho}') \leqq m_\varrho - m$. In this case we reach again the desired conclusion unless $h(y_{i\varrho}') = 0$ and $\nu = 2$. But then $h(a_i'' y_{i\varrho}' b_\varrho) \leqq h(a_i'') + h(b_\varrho) - 1 \leqq m - 1 + n - 1 = N - 1$, and so the term does not occur in (3.13) at all, by construction. In all we have shown that all the terms $y_{i\varrho}' b_\varrho$ which are left in (3.13) belong to $H_n^{1\cdot}$; the remaining congruences in (3.14) may be established in exactly the same way.

We can now apply Lemma 3.3 (i) to (3.13). Since a_i'', u_j', u_k'' are right independent (mod H_{m-2}), we obtain by comparing the coefficients of a_1'',

$$x_1' b_1 + \sum y_{1\varrho}' b_\varrho \equiv 0 \pmod{H_{n-1}}, \tag{3.15}$$

where the summation is over those terms $y_{1\varrho}' b_\varrho$ which still occur on the left of (3.13). Moreover, by an argument similar to that given above, $y_{1\varrho}' \notin K$, unless b_ϱ is pure, and then b_ϱ must be of type $(1, .)$, since otherwise the term would not occur in (3.13). Now x_1' belongs to R_1 and is different from zero, by the left independence of the x's; therefore x_1' is a unit. We put

$$b_1^* = b_1 + \sum w_\varrho b_\varrho, \tag{3.16}$$

where $w_\varrho = (x_1')^{-1} y_{1\varrho}'$, if the term $y_{1\varrho}' b_\varrho$ occurs in (3.15), and $w_\varrho = 0$ otherwise. Then by (3.15) and the remark about $y_{1\varrho}'$ following it, $x_1' b_1^* \in H_{n-1}^{1\cdot}$, whence $b_1^* = (x_1')^{-1} x_1' b_1^* \in H_{n-1}^{1\cdot}$. In particular, $h(b_1^*) \leqq n - 1 < h(b_1)$ and the result follows in this case.

(ii) $N = m + n$.

We have $n_\varrho \leqq n$ and $m_\varrho + n_\varrho \geqq N = m + n$, hence $m_\varrho \geqq m$ for $\varrho = 2, \ldots, r$. Further by the maximality of $h(b_1)$ it follows that either any b_ϱ of height n is pure, or b_1 is not pure. By Lemma 3.2 we have

$$a_1 = a_1' + a_1'', \quad a_1' \in H_m^{\cdot 1}, \quad a_1'' \in H_m^{\cdot 2}, \tag{3.17}$$

and for $\varrho = 2, \ldots, r$,

$$a_\varrho = a_1' x_\varrho'' + a_1'' x_\varrho' + \sum u_i' y_{i\varrho}'' + \sum u_j'' y_{j\varrho}' + a_\varrho^*, \tag{3.18}$$

where $x_\varrho'', y_{i\varrho}'' \in H_{m_\varrho - m}^{\cdot 2}$, $x_\varrho', y_{j\varrho}' \in H_{m_\varrho - m}^{\cdot 1}$, $u_i' \in H_m^{\cdot 1}$, $u_j'' \in H_m^{\cdot 2}$, $a_\varrho^* \in H_{m-1}$ and a_1', a_1'', u_i', u_j'' are right independent (mod H_{m-1}) (with the proviso that a_1' or a_1'', but not both, may be absent).

Inserting (3.17) and (3.18) in (3.8) and noting that

$$h(a_\varrho^* b_\varrho) \leqq m - 1 + n_\varrho \leqq m - 1 + n = N - 1,$$

we find

$$a_1' b_1 + a_1'' b_1 + \sum a_1' x_\varrho'' b_\varrho + \sum a_1'' x_\varrho' b_\varrho + \sum u_i' y_{i\varrho}'' b_\varrho + \sum u_j'' y_{j\varrho}' b_\varrho \equiv 0 \pmod{H_{N-1}}. \tag{3.19}$$

Suppose first that any b_ϱ of height n is pure and let b_1 be of type $(2, .)$ say. We omit from (3.19) all terms which lie in H_{N-1}; in particular this includes $a_1'' b_1$. Now we assert that for the remaining terms

$$\begin{cases} x_\varrho' b_\varrho \equiv y_{j\varrho}' b_\varrho \equiv 0 \pmod{H_n^{1\cdot}}, \\ x_\varrho'' b_\varrho \equiv y_{i\varrho}'' b_\varrho \equiv 0 \pmod{H_n^{2\cdot}}. \end{cases} \tag{3.20}$$

Consider *e.g.* a term $x_\varrho' b_\varrho$, and to begin with suppose again that $N = m_\varrho + n_\varrho$. Since $h(x_\varrho') \leqq m_\varrho - m$, we have

$$h(x_\varrho' b_\varrho) \leqq m_\varrho - m + n_\varrho = N - m = n, \quad \text{i.e.} \quad x_\varrho' b_\varrho \in H_n.$$

If the inequality is strict, then $x_\varrho' b_\varrho \in H_{n-1} \leqq H_n^{1\cdot}$; otherwise $h(x_\varrho') = m_\varrho - m$ and for $m_\varrho > m$ it follows that x_ϱ' and hence $x_\varrho' b_\varrho$ is pure of type $(1, .)$, i.e. $x_\varrho' b_\varrho \in H_n^{1\cdot}$. If $m_\varrho = m$, then $x_\varrho' \in K$, and by hypothesis b_ϱ is pure. Now b_ϱ cannot be of type $(2, .)$ because then $a_1'' x_\varrho' b_\varrho \in H_{N-1}$ and the corresponding term would have been dropped from (3.19); hence b_ϱ must be pure of type $(1, .)$ and then $x_\varrho' b_\varrho \in H_n^{1\cdot}$. Next let $N \neq m_\varrho + n_\varrho$; by Theorem 2.4, $m_\varrho + n_\varrho - 1 = N$ and a_ϱ, b_ϱ are pure of types $(., \nu)$, $(\nu, .)$ respectively ($\nu = 1$ or 2); moreover, $m_\varrho = N + 1 - n_\varrho \geqq N + 1 - n > m$. Now we have

$$h(x_\varrho' b_\varrho) \leqq m_\varrho - m + n_\varrho = N + 1 - m = n + 1,$$

and so *either* $h(x_\varrho') = m_\varrho - m$ and x_ϱ' is pure of type $(1, \nu)$, whence

$$h(x_\varrho' b_\varrho) = m_\varrho - m + n_\varrho - 1 = N - m = n,$$

and $x_\varrho' b_\varrho$ is pure of type $(1, .)$, i.e. $x_\varrho' b_\varrho \in H_n^{1\cdot}$; *or* $h(x_\varrho') < m_\varrho - m$, in which case we have again

$$h(x_\varrho' b_\varrho) \leqq m_\varrho - m - 1 + n_\varrho = N - m = n,$$

and $x'_\varrho b_\varrho$ is of type $(1, .)$, unless $h(x'_\varrho)=0$ and $r=2$. But then

$$h(a''_1 x'_\varrho b_\varrho) \leqq m+n_\varrho-1 \leqq m+n-1=N-1,$$

and the term does not occur in (3.19). Thus every term $x'_\varrho b_\varrho$ occurring in (3.19) belongs to $H_n^{1\cdot}$. The rest of (3.20) is established in the same way.

We know that $a'_1 \not\equiv 0 \pmod{H_{m-1}}$, because $h(a_1 b_1)=N$ and b_1 is pure of type $(2, .)$. Hence we may equate coefficients in (3.19), using Lemma 3.3 (i), and we obtain for the coefficient of a'_1,

$$b_1 + \sum x''_\varrho b_\varrho \equiv 0 \pmod{H_{n-1}}, \tag{3.21}$$

the sum being taken over the terms left in (3.19). If in (3.9) we now put $w_\varrho = x''_\varrho$ or 0 according as $x''_\varrho b_\varrho$ occurs in (3.21) or not, we obtain $h(b_1^*)<h(b_1)$, by (3.21), and hence (3.10). There remains the case where b_1 is not pure. We cannot assert (3.20) now, but at any rate we can show, in the same way as before, that

$$x'_\varrho b_\varrho \equiv y'_{j\varrho} b_\varrho \equiv x''_\varrho b_\varrho \equiv y''_{i\varrho} b_\varrho \equiv 0 \pmod{H_n};$$

by definition of m, at least one of a'_1, a''_1 has height m, say $h(a'_1)=m$. Then using Lemma 3.3 (ii) to compare coefficients of a'_1 in (3.19), we obtain

$$b_1 + \sum x''_\varrho b_\varrho \equiv 0 \pmod{H_n^{1\cdot}}, \tag{3.22}$$

and putting $w_\varrho = x''_\varrho$ or 0 according as the term $x''_\varrho b_\varrho$ occurs in (3.19) or not, we find that b_1^* defined by (3.9) belongs to $H_n^{1\cdot}$, whereas b_1 is of height n and not pure, i.e. $\hbar(b_1^*)<\hbar(b_1)$. Thus (3.10) holds in this case too and the proof is complete.

Clearly Lemmas 3.2–4 have analogues obtained by interchanging left and right throughout. We leave their statement to the reader; of course their proofs follow by symmetry from Lemmas 3.2–4 themselves. As a first application we describe the structure of finitely generated left (and right) ideals in a free product of fields.

THEOREM 3.5. *Let P be a free product of two fields. Then any finitely generated left (or right) ideal of P is a free P-module; more precisely, if $\mathfrak{l}$ is a left ideal of P which can be generated by s elements, then for some $r \leqq s$, there exist r elements $b_1, \ldots, b_r$ of $\mathfrak{l}$ such that every element of $\mathfrak{l}$ can be expressed in one and only one way as $\sum a_\varrho b_\varrho$ $(a_\varrho \in P)$; similarly for right ideals.*

Proof. Let r be the least number of elements in any generating set of $\mathfrak{l}$, then $r \leqq s$ by the definition of s. Now let $\{b_1, \ldots, b_r\}$ be a generating set of $\mathfrak{l}$ with r elements for which the sum $\sum \hbar(b_\varrho)$ assumes its least value; in particular the b's are then left irreducible. We complete the proof by showing that for any $a_\varrho \in P$, $\sum a_\varrho b_\varrho = 0$ implies $a_\varrho = 0$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$. Let then

$$\sum a_\varrho b_\varrho = 0$$

be a relation in which the a_ϱ are not all zero, say $a_\varrho \neq 0$ for $\varrho = 1, \ldots, q$, while the rest are zero. If $N = \max\{h(a_\varrho b_\varrho)\}$, then

$$\sum a_\varrho b_\varrho \equiv 0 \pmod{H_{N-1}}, \tag{3.23}$$

and dropping terms congruent to 0 (mod H_{N-1}) and renumbering the rest we may suppose that the sum in (3.23) runs from 1 to p ($\leqq q$) and that $\hbar(b_1) \geqq \hbar(b_\varrho)$ ($\varrho = 1, \ldots, p$). Applying Lemma 3.4, we can find $w_2, \ldots, w_p \in P$ such that $b_1^* = b_1 + \sum w_\varrho b_\varrho$ satisfies

$$\hbar(b_1^*) < \hbar(b_1).$$

Clearly the sets $\{b_1, \ldots, b_r\}$ and $\{b_1^*, b_2, \ldots, b_r\}$ generate the same left ideal, namely $\mathfrak{l}$, but

$$\hbar(b_1^*) + \sum_{\varrho>1} \hbar(b_\varrho) < \sum \hbar(b_\varrho),$$

contradicting the definition of the b's. This contradiction establishes the first part of the theorem; the rest follows by symmetry.

Finally we establish the existence, under certain conditions, of the highest common right factor of two elements a, b of P, i.e. a common right factor d of a and b such that every common right factor of a and b is also a right factor of d. For this purpose we need the following analogue of the division algorithm.

Let P be the free product of two fields and let b_1, b_2 be two elements of P which have a non-zero common left multiple. Then there exist elements q and r of P and a unit u in P such that

$$u b_1 = q b_2 + r \qquad \hbar(r) < \hbar(b_2). \tag{3.24}$$

For let $q \in P$ and the unit u be chosen so that $\hbar(u b_1 - q b_2)$ has its least value. By hypothesis, $a_1 b_1 = a_2 b_2 \neq 0$ for some $a_1, a_2 \in P$. Now either $u b_1 = q b_2$, so that (3.24) holds trivially, with $r = 0$, or, putting $r = u b_1 - q b_2$, we have

$$(a_2 - a_1 u^{-1} q)\, b_2 = a_1 (b_1 - u^{-1} q\, b_2) = a_1 u^{-1} r \neq 0.$$

By Lemma 3.4, either

$$\hbar(r_1 - w b_2) < \hbar(r) \tag{3.25}$$

or

$$\hbar(b_2 - w r) < \hbar(b_2), \tag{3.26}$$

for some $w \in P$. In the first case, $r - w b_2 = u b_1 - (q + w) b_2$ and so (3.25) contradicts the definition of q and u. Hence (3.26) holds for some $w \in P$. If w is a unit, then $wr - b_2 = wu b_1 - (wq + 1) b_2$, and by (3.26), the relation (3.24) holds, with u, q, r replaced by wu, $wq + 1$, and $wr - b_2$ respectively. If w is not a unit, then in particular $w \notin R_\nu$ ($\nu = 1, 2$), i.e. $\hbar(w) \geqq 4$; on the other hand, by the choice of u and q, r is left-irreducible, and so

$$h(w r) \geqq h(r) + 1; \tag{3.27}$$

for either $h(w) \geqq 2$, or $h(w) = 1$ but w is not pure. Now

$$\begin{aligned} h(w r) &\leqq \max\{h(b_2), h(b_2 - w r)\} \\ &= h(b_2) \quad \text{by (3.26)}, \end{aligned}$$

and combining this with (3.27) we obtain

$$h(r) + 1 \leqq h(b_2),$$

i.e. (3.24) holds.

THEOREM 3.6. *Let P be the free product of two fields. Then any two elements a, b of P which have a non-zero common left multiple, also have a highest common right factor d, determined up to left multiplication by a unit. Moreover, there exist $v, w \in P$ such that*

$$d = v\,a + w\,b. \tag{3.28}$$

A similar assertion holds with left and right interchanged throughout.

Proof. Let $a, b \in P$ and suppose that

$$x\,a = y\,b \neq 0 \tag{3.29}$$

for some $x, y \in P$. By the division algorithm (3.24), there exist elements q_1 and r_1 of P and a unit u_1 of P such that

$$u_1\,a = q_1\,b + r_1, \quad h(r_1) < h(b).$$

Inserting this in (3.29), we obtain

$$x\,u_1^{-1}\,r_1 = x\,(a - u_1^{-1}\,q_1\,b) = y\,b - x\,u_1^{-1}\,q_1\,b = (y - x\,u_1^{-1}\,q_1)\,b.$$

If $r_1 \neq 0$, then this equation shows that r_1 and b have a non-zero common left multiple and hence there exist elements q_2 and r_2 of P and a unit u_2 of P such that

$$u_2\,b = q_2\,r_1 + r_2, \qquad h(r_2) < h(r_1).$$

Continuing in this way we obtain a sequence $r_1, r_2, \ldots$ of elements of P such that $h(r_\nu)$ decreases strictly. The sequence therefore terminates, which can only happen if $r_\nu = 0$ for some ν. Let r_n be the last non-zero r_ν, so that $r_n \neq 0$, $r_{n+1} = 0$. Putting $r_{-1} = a$, $r_0 = b$, we thus have the equations

$$u_\nu\,r_{\nu-2} = q_\nu\,r_{\nu-1} + r_\nu, \quad h(r_\nu) < h(r_{\nu-1}), \tag{3.30}$$

for $\nu = 1, 2, \ldots, n$, and $u_{n+1}\,r_{n-1} = q_{n+1}\,r_n$. As in the classical Euclidean algorithm we can now show that r_n is a common right factor of a and b and that

$$r_n = v\,a + w\,b$$

for certain $v, w \in P$; hence any common right factor of a and b must also be a right factor of r_n. Thus by definition, $d = r_n$ is a highest common right factor of a and b and it satisfies an equation of the form (3.28). If u is any unit of P, then ud is again a highest common right factor of a and b, as is easily verified. Conversely, if d' is another element of P with the same properties as d, then $d = x\,d'$, $d' = y\,d$ for some $x, y \in P$, whence $d = x\,y\,d$, $x\,y = 1$, and so d' is obtained from d by left multiplication by a unit. The last assertion of the theorem now follows by symmetry and so the proof is complete.

We note that Theorem 3.6 can also be stated as follows: If $a, b \in P$ and $Pa \cap Pb \neq 0$, then there exists $d \in P$ such that $Pa + Pb = Pd$. In this form the theorem may be regarded as a more precise version of Theorem 3.5, for the case of two generators.

Suppose that a free product P of fields is such that

(3.31) $\quad Pa \cap Pb \neq 0$ for any two non-zero elements $a, b \in P$;

then by Theorem 3.6 all left ideals on two generators (and hence, by induction, all finitely generated left ideals) are principal. In particular this includes the assertion of Theorem 3.5. Further, by ORE's result [4], P could then be embedded in a field.

We shall now show that except possibly in special cases, the free product of two fields does not satisfy (3.31). If one of the factors of P coincides with the common subfield, i.e. if $R_1 = K$ or $R_2 = K$ then P itself equals R_2 or R_1 respectively and (3.31) holds trivially. We must therefore exclude this case. Suppose further that one of R_1, R_2 is of left dimension at least 3 over K, say R_1. Then there exist elements $x, y \in R_1$ such that 1, x and y are left independent over K, or in other words, x and y are left independent (mod H_0). Let $z \in R_2$, $z \notin K$, and put $a = xz + zx$, $b = yz + zy$. It follows by Theorem 2.1 that a and b are non-units in P. Now if we had $Pa \cap Pb \neq 0$, then by Theorem 3.6, $Pa + Pb = Pd$ for some $d \in P$, i.e. there exist $p, q, a_1, b_1 \in P$ such that

$$d = pa + qb, \tag{3.32}$$

$$a = a_1 d, \qquad b = b_1 d \qquad (a_1 \neq 0,\ b_1 \neq 0). \tag{3.33}$$

Clearly d may be taken to be left-irreducible. Then by (3.33) and Theorem 2.4, Cor. 2, $h(d) \leqq 2$. Suppose first that $h(d) = 2$; then $h(a_1) \leqq 1$, by Theorem 2.4, Cor. 1. If $h(a_1) = 1$, then a_1 and d must be pure of types $(\cdot, \nu)$ and $(\nu, \cdot)$ respectively, i.e. $a_1 \in R_\nu$ and hence $d = a_1^{-1} a$; but then $2 = h(d) = h(a_1^{-1} a) = 3$, by Theorem 2.4, a contradiction. Therefore, if $h(d) = 2$, then $h(a_1) = 0$, i.e. $a_1 \in K$ and similarly $b_1 \in K$. Putting $\lambda = b_1 a_1^{-1}$, we have $b = \lambda a$, i.e.

$$\lambda xz + \lambda zx = yz + zy;$$

equating the pure terms of type (1, 2) we get

$$\lambda xz - yz \equiv 0 \pmod{H_1},$$

and so by Lemma 3.3 (i),

$$\lambda x - y \equiv 0 \pmod{H_0},$$

which contradicts the left independence (mod H_0) of x and y. It follows that we must have $h(d) < 2$. Now $h(pa) \geqq 2$, and so by (3.32), $h(pa) = h(qb) = N$ say, where $N \geqq 2$, and $h(p) = h(q) = N - 2$. Rewriting (3.32) as a congruence we get

$$p xz + p zx + q yz + q zy \equiv 0 \pmod{H_{N-1}},$$

or taking the pure components separately,

$$p\,x\,z + q\,y\,z \equiv p\,z\,x + q\,z\,y \equiv 0 \pmod{H_{N-1}}. \tag{3.34}$$

Now p and q are of height $N-2$, hence $p\,x, q\,y \in H^{\cdot 1}_{N-1}$ and since $z \in R_2$, $z \notin K$, the first congruence of (3.34) yields, by Lemma 3.3 (i),

$$p\,x + q\,y \equiv 0 \pmod{H_{N-2}}.$$

By the left independence (mod H_0) of x and y we find that

$$p \equiv q \equiv 0 \pmod{H^{\cdot 1}_{N-2}}. \tag{3.35}$$

Thus p and q are pure of height $N-2$ and type $(\cdot, 1)$. It follows that pz and qz are pure of height $N-1$ and type $(\cdot, 2)$. Applying Lemma 3.3 (i) to the second congruence of (3.34) we obtain

$$p\,z \equiv q\,z \equiv 0 \pmod{H_{N-2}},$$

which contradicts the fact that $h(pz) = h(qz) = N-1$. This contradiction shows that a and b have no common left multiple other than zero.

Thus in general, ORE's method cannot be applied to embed the free product of fields in a field, and the interesting question, whether such an embedding is always possible, remains open. There also remains the discussion of the product of two fields which are both 2-dimensional over the common subfield. We hope to deal with this case in a further communication.

Added in proof (30. 3. 60). Lemma 3.4 may be used to prove that *every* right ideal in a free product P of fields is free. See a forthcoming paper on a generalization of the Euclidean algorithm, in which the independence property of Lemma 3.4 is studied in abstracto.

References

[1] CARTAN, H., and S. EILENBERG: Homological algebra. Princeton 1956. — [2] COHN, P. M.: On the free product of associative rings. Math. Z. **71**, 380–398 (1959). — [3] JACOBSON, N.: Structure of rings. New York 1956. — [4] ORE, O.: Linear equations in non-commutative fields. Ann. of Math. **32**, 463–477 (1931).

Dept. of Math., The University, Manchester 13 (England)

(Eingegangen am 5. November 1959)

TSCHAUNER, J.
Math. Zeitschr. 73, 457–459 (1960)

Über einen Zusammenhang zwischen den Kugelfunktionen und Zylinderfunktionen

Von
JOHANN TSCHAUNER

Inhalt. Zwischen den Kugelfunktionen und den Zylinderfunktionen besteht ein Zusammenhang, der wahrscheinlich nicht allgemein bekannt ist. Er läßt sich aus der für die Kugelfunktionen geltenden Rekursionsformel ableiten. Man findet, daß die Erzeugende Funktion der durch eine Γ-Funktion geteilten Kugelfunktionen eine — im allgemeinen inhomogene — Besselsche Differentialgleichung befriedigt. Im Falle der Kugelfunktionen 1. Art mit ganzzahligen Indices wird diese Differentialgleichung homogen und läßt eine sehr einfache Lösung zu, von der ein Sonderfall in der Literatur bekannt ist.

Die Differentialgleichung der erzeugenden Funktion. Die Kugelfunktionen

$$u_n(x, p, q) = K^q_{n+p}(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

genügen der bekannten Rekursionsformel [1, S. 82]

$$(n+2+p-q)\,u_{n+2} - x(2n+3+2p)\,u_{n+1} + (n+1+p+q)\,u_n = 0. \tag{2}$$

Dabei ist

$$K^q_{n+p} = C_1 \cdot P^q_{n+p} + C_2 \cdot Q^q_{n+p} \tag{3}$$

eine allgemeine Kugelfunktion. Im folgenden werden die aus den u_n nach Division durch eine Γ-Funktion hervorgehenden Kugelfunktionen

$$v_n = \frac{u_n}{\Gamma(1+n+p+q)} = \frac{K^q_{n+q}}{\Gamma(1+n+p+q)} \tag{4}$$

betrachtet, welche der Rekursionsformel

$$(n+2+p-q)(n+2+p+q)\,v_{n+2} - x(2n+3+2p)\,v_{n+1} + v_n = 0 \tag{5}$$

genügen, wobei $1+n+p+q>0$ vorausgesetzt werden muß.

Multipliziert man (5) mit t^n und summiert man über n von Null bis Unendlich, dann erhält man für die erzeugende Funktion

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n \tag{6}$$

der Funktionen v_n eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung

$$t^2 \cdot \ddot{V} + [(1+2p)\,t - 2x t^2]\,\dot{V} + [p^2 - q^2 - (1+2p)\,x\,t + t^2]\,V = R_0 + R_1 t. \tag{7}$$

Ihre rechte Seite ist ein linearer Ausdruck in t mit den Beiwerten

$$R_0 = \frac{(p-q)\,K_p^q}{\Gamma(p+q)}, \quad R_1 = \frac{(1+p-q)\,K_{1+p}^q - (1+2p)\,x\,K_p^q}{\Gamma(1+p+q)},$$

welche durch die Anfangswerte v_0, v_1 von v_n bestimmt werden. Die Gl. (7) ist eine inhomogene Besselsche Differentialgleichung, denn mit der Substitution

$$V(t) = e^{xt} \cdot t^{-p} \cdot W(t) \tag{8}$$

erhält man für die Funktion $W(t)$ die inhomogene Differentialgleichung

$$t^2 \cdot \ddot{W} + t \cdot \dot{W} + (y^2 t^2 - q^2)\, W = (R_0 + R_1 t)\, t^p\, e^{-xt}, \tag{9}$$

wobei $y = \sqrt{1-x^2} = \sin\vartheta$.

Die allgemeine Lösung der Gl. (7) ist daher

$$V(t) = V_1(t) + e^{xt} t^{-p} [A J_q(yt) + B N_q(yt)], \tag{10}$$

worin $V_1(t)$ die Partikularlösung der inhomogenen Gl. (7) darstellt, die durch einen passenden Ansatz berechnet werden kann. Sie wird für $t \to 0$ im allgemeinen von der gleichen Ordnung $p+q$ unendlich wie die zweite partikuläre Lösung $B e^{xt} t^{-p} N_q(yt)$. Da jedoch $V(0) = v_0$ endlich ist, muß die Konstante B so festgelegt werden, daß

$$\lim_{t=0} [V_1(t) + B e^{xt} t^{-p} N_q(yt)]$$

endlich bleibt. Daraus ergibt sich B. Die Konstante A folgt dann aus der Anfangsbedingung $V(0) = v_0$.

Lösung der Gl. (7) für den Sonderfall $K_{n+p}^q = P_{n+m}^m$. Für $p = q = m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) verschwindet der Beiwert R_0. Versteht man weiter noch unter K_{n+m}^m die Legendreschen Polynome P_{n+m}^m, so verschwindet auch der Beiwert R_1. Die Erzeugende Funktion der Legendreschen Polynome $P_{n+m}^m : (n+2m)!$ genügt daher der homogenen Besselschen Differentialgleichung

$$t \cdot \ddot{V} + (1 + 2m - 2xt)\, \dot{V} + [t - (1+2m)\, x] \cdot V = 0, \tag{11}$$

von deren partikulären Lösungen hier nur die im Nullpunkt endliche

$$V(t) = A \cdot e^{xt} t^{-m} J_m(yt)$$

n Frage kommt. Die Konstante A ergibt sich aus der Anfangsbedingung

$$V(0) = v_0 = \frac{P_m^m}{(2m)!} = \frac{(-1)^m (2m)!\, y^m}{2^m \cdot m!} \frac{1}{(2m)!} = A \frac{y^m}{2^m \cdot m!}$$

zum Wert $A = (-1)^m$. Man findet daher die Beziehung

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{n+m}^m(x)}{(n+2m)!}\, t^n = (-1)^m \cdot t^{-m} \cdot e^{xt} \cdot J_m(yt). \tag{12}$$

Sie kann, da $P_n^m = 0$, wenn $n < m$, auch noch in der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^m(x)}{(n+m)!} t^n = (-1)^m e^{xt} \cdot J_m(yt) \tag{13}$$

geschrieben werden.

Die Gln. (12), (13) stellen eine Verallgemeinerung der in [2] und [3] angegebenen erzeugenden Funktion für beliebige ganzzahlige $m > 0$ dar.

Literatur

[1] MAGNUS, W., u. F. OBERHETTINGER: Formeln und Sätze der speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1948. — [2] RAINVILLE, E. D.: Bull. Amer. Math. Soc. **51**, 268–271 (1945). — [3] ERDÉLYI, A. und andere: Higher transcendental functions, Bd. 3, S. 262, Gl. (4). New York-Toronto-London 1955.

Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, Oberpfaffenhofen, Post Wessling (Oberbayern)

(Eingegangen am 7. Januar 1960)

SRIVASTAVA, P.
Math. Zeitschr. 73, 460–465 (1960)

Tauberian theorems for absolute summability of series and integrals

By
PRAMILA SRIVASTAVA

1.1. DEFINITIONS AND NOTATIONS. The Stieltjes integral

$$\int_0^\infty d\alpha(t)$$

is said to be absolutely summable (C, k), or summable $|C, k|$, if

$$\frac{\alpha^k(\omega)}{\omega^k} = \frac{1}{\omega^k}\int_0^\omega (\omega - t)^k \, d\alpha(t), \qquad k \geqq 0,$$

is of bounded variation in (A, ∞), where A is a finite positive number [1]. We may take $A = 0$.

We write

$$\beta^k(\omega) = \int_0^\omega (\omega - t)^{k-1} t \, d\alpha(t).$$

The series $\sum a_n$ is said to be absolutely summable (R, λ, k), or summable $|R, \lambda, k|$, if $\omega^{-k} A_\lambda^k(\omega)$ is of bounded variation in (A, ∞), where

$$A_\lambda^k(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega} (\omega - \lambda_n)^k a_n, \qquad k \geqq 0,$$

and $\{\lambda_n\}$ is a positive monotonic increasing sequence tending to infinity with n [2].

We, also, write

$$B_\lambda^k(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega} (\omega - \lambda_n)^{k-1} \lambda_n a_n.$$

The series $\sum a_n$ is said to be absolutely summable (A, λ), or summable $|A, \lambda|$, if the series $\sum a_n e^{-\lambda_n x}$ is convergent for all positive x and the sum function $f(x) = \sum a_n e^{-\lambda_n x}$ is of bounded variation in $(0, \infty)$ [3].

When $\lambda_n = n$, summability $|R, \lambda, k|$ is equivalent to summability $|C, k|$ [4] and summability $|A, \lambda|$ reduces to absolute Abel summability, or summapility $|A|$ [5]. And, when $\alpha(\omega) = A_\lambda^0(\omega)$, summability $|C, k|$ of the Stieltjes integral $\int_0^\infty d\alpha(t)$ is the same as summability $|R, \lambda, k|$ of $\sum a_n$.

[1] See HARDY [2], § 5.14 for the definition of the (C, k) mean, which leads to the present definition.

[2] OBRECHKOFF [8], [9].

[3] See ZYGMUND [14] and LORENTZ and MACPHAIL [7].

[4] HYSLOP [4].

[5] See HYSLOP [5].

1.2. INTRODUCTION. Starting with TAUBER in 1897[6]), succession of writers have obtained results what are now termed Tauberian theorems. The classical theorem of TAUBER is to the effect that if a power series $f(x)=\sum a_n x^n$ converges for $|x|<1$ and the sum function $f(x)$ tends to a limit s, as $x\to 1-0$, and if $na_n=o(1)$, then $\sum a_n$ converges to s. This result was generalized by LANDAU[7]) who proved the following theorem for the more general class of Dirichlet's series.

THEOREM A. *If* (i) $a_n=o\{(\lambda_n-\lambda_{n-1})/\lambda_n\}$ *and* (ii) *the series* $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$, *then certainly convergent for* $\sigma>0$, *tends to a limit* A *as* s *tends to zero through positive values, then the series* $\sum a_n$ *is convergent and has the sum* A.

Theorem A was further generalized by SCHNEE[8]) who replaced the condition (i) by the more general condition

$$\text{(i')} \qquad \lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n=o(\lambda_n),$$

and proved the conditions (i') and (ii) to be also necessary for the convergence of $\sum a_n$.

The following extension of SCHNEE's theorem to the case of summability (R, λ, k) has been obtained by RAJAGOPAL.

THEOREM B[9]). *Sufficient conditions for the* (R, λ, k) *summability of* $\sum a_n$ *to* s *are that* (i) $f(x)=\sum a_n e^{-\lambda_n x}$ *converges for* $x\geqq 0$ *and* $\lim_{x\to 0} f(x)=s$ *and* (ii) $B_\lambda^{k+1}(x)=o(\lambda_n^{k+1})$, $\lambda_n\leqq x<\lambda_{n+1}$, *as* $n\to\infty$. *If* $f(x)$ *converges for* $x>0$, *then the conditions* $\lim_{x\to 0} f(x)=s$, $B_\lambda^{k+1}(x)=o(x^{k+1})$, *as* $x\to\infty$, *are necessary for the* (R, λ, k) *summability of* $\sum a_n$.

Concerning the absolute summability of series by the Abel and Cesàro methods, HYSLOP proved the following theorem.

THEOREM C[10]). *If the series* $\sum a_n$ *is summable* $|A|$ *and if* $\sum \Delta(na_n)$ *is summable* $|C, k+1|$, *where* $k\geqq 0$, *then* $\sum a_n$ *is summable* $|C, k|$.

When $k=0$, Theorem C gives the analogue of TAUBER's theorem for absolute convergence.

For the Stieltjes integral the following Tauberian theorem is due to WIDDER.

THEOREM D[11]). *If* $I(y)=\int_0^\infty e^{-yt}d\alpha(t)$ *is convergent for* $y>0$ *and* $I(y)\to l$, *when* $y\to 0$, *then a necessary and sufficient condition that* $\int_0^\infty d\alpha(t)=l$, *i.e.* $\alpha(t)\to l$, *when* $t\to\infty$, *is that* $\beta^1(t)=o(t)$, *when* $t\to\infty$.

The object of the present paper is to extend the theorem of HYSLOP and to obtain the analogues of other above mentioned theorems for *absolute*

---

[6]) TAUBER [12].

[7]) LANDAU [6]. See also HARDY and RIESZ [3], § 7.

[8]) SCHNEE [11]. See also HARDY and RIESZ [3], § 7 and CHANDRASEKHARAN and MINAKSHISUNDARAM [1], § 3.8.

[9]) RAJAGOPAL [10].

[10]) HYSLOP [5].

[11]) WIDDER [13], p. 187, Theorem 3b. See also HARDY [2], p. 158, Theorem 88.

summability. Thus in Theorem 1 of this paper we prove a Tauberian theorem for a Stieltjes integral, which includes as a particular case the analogue for absolute convergence of Theorem D. In Theorem 2, which we deduce from Theorem 1, we generalize Theorem C and prove the corresponding result for summability $|A, \lambda|$ and summability $|R, \lambda, k|$. Theorem 2 may be said to be the analogue of Theorem B. Theorem 3 gives the analogue for absolute convergence of SCHNEE's Tauberian theorem.

I thank Prof. B. N. PRASAD for his kind help and guidance in the preparation of this paper.

2.1. We prove the following theorems.

THEOREM 1. *If* (i) *the integral* $\int^{\infty} d\alpha(t)$ *is summable* $|A|$, *i.e. its Laplace transform* $I(y)=\int^{\infty} e^{-yt}\, d\alpha(t)$ *is convergent for* $y>0$ *and the function* $I(y)$ *is of bounded variation in* $(0, \infty)$, *then the necessary and sufficient condition for the given integral* $\int^{\infty} d\alpha(t)$ *to be summable* $|C, k|$ *is that* (ii) $t^{-(k+1)}\beta^{(k+1)}(t)$ *is of bounded variation in* $(0, \infty)$.

THEOREM 2. *If* $\sum^{\infty} a_n$ *is summable* $|A, \lambda|$, *then a necessary and sufficient condition for* $\sum^{\infty} a_n$ *to be summable* $|R, \lambda, k|$ *is that* $\omega^{-(k+1)}\, B_{\lambda}^{k+1}(\omega)$ *is of bounded variation in* $(0, \infty)$.

THEOREM 3. *If* (i) $\omega^{-1} B_{\lambda}^{1}(\omega)$ *is of bounded variation in* $(0, \infty)$ *and* (ii) *the function* $f(x)$, *the sum of the convergent series* $\sum a_n e^{-\lambda_n x}$, $x>0$, *is also of bounded variation in* $(0, \infty)$, *then* $\sum^{\infty} a_n$ *is absolutely convergent. Moreover, the conditions* (i) *and* (ii) *are also necessary for the absolute convergence of* $\sum^{\infty} a_n$.

2.2. We require, for the proof of our theorems, the following lemmas:

LEMMA 1 [12]. *If the integral* $\int^{\infty} e^{-yt}\, d\alpha(t) \equiv I(y)$ *is convergent then its sum* $I(y)$ *satisfies the following equality*

$$I(y)=\frac{y^{k+1}}{\Gamma(k+1)}\int_0^{\infty}\alpha^{k}(u)\, e^{-yu}\, du\,.$$

LEMMA 2. *For the summability* $|C, k|$ *of* $\int^{\infty} d\alpha(t)$ *it is necessary and sufficient that* $\int^{\infty} d\alpha(t)$ *be summables* $|C, k+1|$ *and* $\omega^{-(k+1)}\beta^{k+1}(\omega)$ *be of bounded variation in* $(0, \infty)$.

PROOF. We have

$$\frac{\alpha^{k}(u)}{u^{k}}-\frac{\alpha^{k+1}(u)}{u^{k+1}}=\frac{1}{u^{k+1}}\int_0^{u} t\,(u-t)^{k}\, d\alpha(t)$$

$$=\frac{\beta^{k+1}(u)}{u^{k+1}}\,.$$

[12] RAJAGOPAL [10].

Since, by the first theorem of consistency for absolute summability [13]), summability $|C, k|$ implies summability $|C, k+1|$, the lemma follows.

2.3. Proof of Theorem 1. The necessity part of the theorem follows from Lemma 2. Therefore, we have only to prove that the conditions (i) and (ii) are sufficient for the summability $|C, k|$ of the given integral. By Lemma 1, on account of the hypothesis (i), we have

$$(1)\qquad \begin{cases} I'(y) = -\int_0^\infty e^{-yt}\, t\, d\alpha(t) \\ \qquad = -\dfrac{y^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \int_0^\infty \beta^{k+1}(t)\, e^{-yt}\, dt. \end{cases}$$

By Lemma 2, on account of the hypothesis (ii), it is sufficient to show that $\int_0^\infty d\alpha(t)$ is summable $|C, k+1|$, i.e.

$$\int_0^\infty |\omega^{-(k+2)}\, \beta^{k+1}(\omega)|\, d\omega < \infty.$$

Hence, by (1) and hypothesis (i), it will suffice to show that

$$I \equiv \int_0^\infty \Big|\omega^{-(k+2)}\, \beta^{k+1}(\omega) - \frac{1}{\Gamma(k+2)}\, \omega^{-(k+3)} \int_0^\infty \beta^{k+1}(t)\, e^{-t/\omega}\, dt\, d\omega < \infty.$$

Now, writing $\gamma^{k+1}(\omega)$ for $\omega^{-(k+1)}\, \beta^{k+1}(\omega)$, we have

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \Big| \gamma^{k+1}(\omega)\, \omega^{-(k+3)}\, \frac{1}{\Gamma(k+2)} \int_0^\infty t^{k+1}\, e^{-t/\omega}\, dt - \\ &\quad - \omega^{-(k+3)}\, \frac{1}{\Gamma(k+2)} \int_0^\infty \gamma^{k+1}(t)\, t^{k+1}\, e^{-t/\omega}\, dt \Big|\, d\omega \\ &= \frac{1}{\Gamma(k+2)} \int_0^\infty \omega^{-(k+3)} \Big| \int_0^\omega \{\gamma^{k+1}(\omega) - \gamma^{k+1}(t)\}\, t^{k+1}\, e^{-t/\omega}\, dt - \\ &\quad - \int_\omega^\infty \{\gamma^{k+1}(t) - \gamma^{k+1}(\omega)\}\, t^{k+1}\, e^{-t/\omega}\, dt \Big|\, d\omega \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(k+2)} \int_0^\infty \omega^{-(k+3)}\, d\omega \int_0^\omega t^{k+1}\, e^{-t/\omega}\, dt \int_t^\omega |d\gamma^{k+1}(u)| + \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(k+2)} \int_0^\infty \omega^{-(k+3)}\, d\omega \int_\omega^\infty t^{k+1}\, e^{-t/\omega}\, dt \int_\omega^t |d\gamma^{k+1}(u)| \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

say. Since

$$\int_0^\omega t^{k+1}\, e^{-t/\omega}\, dt \int_t^\omega |d\gamma^{k+1}(u)| = \int_0^\omega |d\gamma^{k+1}(u)| \int_0^u t^{k+1}\, e^{-t/\omega}\, dt,$$

[13]) Obrechkoff [9].

we have [14])

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(k+2)}\,\omega^{-(k+3)}\,d\omega \int_0^\omega |d\gamma^{k+1}(u)| \int_0^u t^{k+1}\,e^{-t/\omega}\,dt \\
&= K\int_0^\infty |d\gamma^{k+1}(u)| \int_u^\infty \omega^{-(k+3)}\,d\omega \int_0^u t^{k+1}\,e^{-t/\omega}\,dt \\
&= K\int_0^\infty |d\gamma^{k+1}(u)| \int_0^u t^{k+1}\,dt \int_u^\infty e^{-t/\omega}\,\omega^{-(k+3)}\,d\omega \\
&\leqq K\int_0^\infty |d\gamma^{k+1}(u)| \int_0^u t^k\,u^{-(k+1)}\,e^{-t/u}\,dt \\
&= K\int_0^\infty |d\gamma^{k+1}(u)| \int_1^\infty v^k\,e^{-v}\,dv \\
&= K\int_0^\infty |d\gamma^{k+1}(u)| \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

by hypothesis (ii). Again, since

$$\int_\omega^\infty t^{k+1}\,e^{-t/\omega}\,dt \int_\omega^t |d\gamma^{k+1}(u)| = \int_\omega^\infty |d\gamma^{k+1}(u)| \int_u^\infty t^{k+1}\,e^{-t/\omega}\,dt,$$

we obtain

$$\begin{aligned}
I_2 &= K\int_0^\infty \omega^{-(k+3)}\,d\omega \int_\omega^\infty |d\gamma^{k+1}(u)| \int_u^\infty t^{k+1}\,e^{-t/\omega}\,dt \\
&= K\int_0^\infty |d\gamma^{k+1}(u)| \int_0^u \omega^{-(k+3)}\,d\omega \int_u^\infty t^{k+1}\,e^{-t/\omega}\,dt \\
&\leqq K\int_0^\infty |d\gamma^{k+1}(u)| \int_0^u e^{-u/2\omega}\,\omega^{-(k+3)}\,d\omega \int_u^\infty t^{k+1}\,e^{-t/2\omega}\,dt \\
&\leqq K\int_0^\infty |d\gamma^{k+1}(u)| \int_0^u \omega^{-2}\,u\,e^{-u/2\omega}\,d\omega \int_0^\infty \omega^{-(k+2)}\,t^{k+1}\,e^{-t/2\omega}\,dt \\
&= K\int_0^\infty |d\gamma^{k+1}(u)| \int_0^u \omega^{-2}\,u\,e^{-u/2\omega}\,d\omega \\
&= K\int_0^\infty |d\gamma^{k+1}(u)| \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

by hypothesis (ii). And this completes the proof of Theorem 1.

2.4. PROOF OF THEOREM 2. We put $\alpha(\omega) = A_\lambda^0(\omega)$ in Theorem 1 and obtain Theorem 2.

2.5. PROOF OF THEOREM 3. The first part of the theorem follows from the sufficiency part of Theorem 2. Since

$$\sum_{\lambda_n<\omega} a_n - \sum_{\lambda_n<\omega}\left(1-\frac{\lambda_n}{\omega}\right)a_n = \omega^{-1}\,B_\lambda^1(\omega),$$

[14]) K is a constant which is not necessarily the same at each occurrence.

the necessity of condition (i) follows from the first theorem of consistency for summability $|R, \lambda, k|$ [15]. The necessity of condition (ii) is evident.

2.6. Since, whenever $\sum^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}$, $x>0$, is convergent summability $|R, \lambda, k|$ of a series $\sum a_n$ implies [16]) its summability $|A, \lambda|$, we can state the following corollary to Theorem 3.

COROLLARY. *If $\sum^{\infty} a_n$ is summable $|R, \lambda, k|$, then a necessary and sufficient condition for the absolute convergence of $\sum a_n$ is that $\omega^{-1} B_{\lambda}^{1}(\omega)$ is of bounded variation in* $(0, \infty)$.

2.7. Finally, we give below the analogue of Theorem 1 for ordinary summability, which includes Theorems B and D as special cases.

If the integral $\int^{\infty} d\alpha(t)$ is summable (A), i.e. *its Laplace transform $I(y) = \int^{\infty} e^{-yt} d\alpha(t)$ is convergent for $y>0$ and $I(y)$ tends to l as $y \to \infty$, then a necessary and sufficient condition for the given integral $\int^{\infty} d\alpha(t)$ to be summable (C, k) to the sum l, is that $\beta^{k+1}(t) = o(t^{k+1})$, as $t \to \infty$.*

The above can be easily obtained from a theorem of RAJAGOPAL [17]) and the following identity.

$$t^{-k} \alpha^{k}(t) - t^{-(k+1)} \alpha^{k+1}(t) = t^{-(k+1)} \beta^{k+1}(t).$$

References

[1] CHANDRASEKHARAN, K., and S. MINAKSHISUNDARAM: Typical Means. Oxford 1952. — [2] HARDY, G. H.: Divergent Series. Oxford 1949. — [3] HARDY, G. H., and M. RIESZ: The General Theory of Dirichlet's Series. Cambridge 1915. — [4] HYSLOP, J. M.: The absolute summability of series by Rieszian means. Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **5**, 46—54 (1936). — [5] HYSLOP, J. M.: A Tauberian theorem for absolute summability. J. London Math. Soc. **12**, 176—180 (1937). — [6] LANDAU, E.: Über die Konvergenz einiger Klassen von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes. Monatshefte für Math. **18**, 8—28 (1907). — [7] LORENTZ, G. G., and M. S. MACPHAIL: Direct theorems on methods of summability. III: Absolute summability functions. Math. Z. **59**, 375—386 (1953/54). — [8] OBRECHKOFF, N.: Sur la sommation absolute des séries de Dirichlet. C. R. Acad. Sci. Paris **186**, 215—217 (1928). — [9] OBRECHKOFF, N.: Über die absolute Summierung der Dirichletschen Reihen. Math. Z. **30**, 375—386 (1929). — [10] RAJAGOPAL, C. T.: On Riesz summability and summability by Dirichlet's series. Amer. J. Math. **69**, 371—378, 851—852 (1947). — [11] SCHNEE, W.: Über Dirichletschen Reihen. Rendiconti di Palermo **27**, 87—116 (1909). — [12] TAUBER, A.: Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. Monatshefte für Math. **8**, 273—277 (1897). — [13] WIDDER, D. V.: The Laplace Transform. Princeton 1941. — [14] ZYGMUND, A.: On certain integrals. Trans. Amer. Math. Soc. **55**, 170—194 (1944).

[15]) OBRECHKOFF [9].

[16]) LORENTZ and MACPHAIL [7].

[17]) RAJAGOPAL [10]; Theorem 1.

Dept. of Math., University of Allahabad (India)

(Eingegangen am 6. Oktober 1959)